TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES FRÈRES DES ÉCOLES CHRÉTIENNES.

MONTREAL:
PUBLIÉ PAR J. B. ROLLAND, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
RUE SAINT-VINCENT.
1853.

INTRODUCTION.

L'algèbre est la science qui traite des grandeurs en général. Ce n'est pas sous un point de vue aussi étendu que nous nous proposons de la considérer, mais uniquement dans son application à l'Arithmétique, où son emploi se réduit alors à faciliter le calcul des nombres.

Mais on dira : à quoi bon l'Algèbre ? l'Arithmétique ne suffit-elle pas ? Voici mes réponses:—

1° Si toute la science du calcul était renfermée dans les opérations de l'*Arithmétique pratique*, sans doute l'Algèbre lui serait complettement inutile ; mais les questions sur l'*Escompte*, l'*Intérêt*, le *Change*, le *Courtage*, etc., ne constituent pas la science entière. L'Arithmétique est l'art de résoudre GÉNÉRALEMENT TOUTES *les questions qui peuvent être proposées sur les nombres ;* leur plus ou moins d'utilité n'est point une condition ; et, prise ainsi dans toute son étendue, l'Arithmétique ne marche plus, pour ainsi dire, qu'à tâtons, si l'Algèbre ne vient à son secours.

2° Un cours d'Arithmétique pratique exige ordinairement pour un jeune homme de seize à dix-huit ans, au moins dix-huit mois d'étude. Eh bien ! l'élève au bout de ce temps n'en est pas moins circonscrit dans un cercle fort étroit, comparé à celui qu'embrassent toutes les questions proposables sur les nombres. Cependant que lui faudrait-il encore pour atteindre à la circonférence de ce second cercle ? UN MOIS AU PLUS. Certes, lorsqu'on a consacré dix-huit mois à l'étude d'une science très-limitée, ce n'est pas s'aventurer, j'imagine, que de consacrer un mois encore à l'étude d'une seconde science qui doit donner à la première une extension presque sans bornes.

Je crois pourtant utile de dire que l'Algèbre, appliquée au calcul des nombres, ne doit point être considérée comme *remplaçant* l'Arithmétique, mais bien comme son *auxiliaire*. Ainsi, l'étude de la première, bien loin de dispenser l'élève de la connaissance de toutes les opérations matérielles de la seconde, suppose au contraire cette connaissance *déjà pleinement acquise*.

Il ne reste qu'un mot à dire sur le plan de cet ouvrage, et sur son introduction dans les écoles chrétiennes.

Ce traité tout-à-fait élémentaire mettra l'enfant, dès la première leçon, aux équations, et lui évite l'ennui du calcul littérale ordinaire dans les autres traités d'algèbre, qui le dégoute de cette science, parce qu'il ne voit de résultat de ses efforts qu'après avoir employé un temps considérable à des opérations stériles. On s'est attaché à présenter ces leçons sous la forme la plus CLASSIQUE POSSIBLE, afin que les professeurs d'Arithmétique, qui sont entièrement étrangers à l'Algèbre, n'aient besoin, pour ainsi dire, que d'une seule lecture attentive des principes qu'on donne pour se trouver immédiatement en état de les démontrer à leurs élèves.

Nous croyons rendre un grand service à la jeunesse canadienne en publiant ce petit traité, en langue française. Jusqu'ici le manque d'un pareil ouvrage dans ce pays a été la seule cause qui a pu empêcher les enfans, d'ailleurs si studieux du Canada, qui fréquentent les écoles modèles, à être familiarisés avec cette science si utile et si agréable.

Le recueil des problèmes amusants qui sont à la fin ne sera pas dédaigné par les hommes les plus versés dans cette science : nous recommandons à ceux qui voudront les opérer de lire bien attentivement les principes que nous donnons en commençant sur la propriété des nombres.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE.

PRINCIPES GÉNÉRAUX,

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES

ET AUTRES EXPLICATIONS IMPORTANTES, AUTANT POUR L'INTELLIGENCE DU CALCUL, QUE POUR EN SIMPLIFIER LES OPÉRATIONS DANS UNE INFINITÉ DE CAS.

SUR LES DIFFÉRENTES ESPÈCES DE NOMBRES.

I. Un nombre exprime des unités seules, ou des parties d'unité seules, ou, tout à la fois, des unités et des parties d'unité.

On entend par *unité* ou *entier* 1, et par *partie d'unité* ou *fraction*, toute valeur au-dessous de 1.

II. Le nombre qui n'exprime que des unités s'appelle *nombre entier*, *simple* ou *incomplexe*. Celui qui exprime à la fois des unités et des parties d'unité, s'appelle nombre *fractionnaire*, *composé* ou *complexe*. Celui qui n'exprime que des parties d'unité s'appelle *fraction*.

III. Le nombre dont l'espèce des unités n'est point désignée, tel que 1, 2, 3, 4...., s'appelle *nombre abstrait*. Celui dont l'espèce est désignée, tel que 5 *louis* 6 *verges*,.... s'appelle *nombre concret*.

IV. Le nombre terminé par 2, 4, 6, 8 ou 0, s'appelle *nombre pair*. Celui terminé par 1, 3, 5, 7 ou 9, s'appelle *nombre impair*.

V. Le nombre qui n'a de diviseurs exacts, en nombres entiers, que lui-même ou l'unité, tel que 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc., s'appelle *nombre premier*. Celui qui a d'autres diviseurs exacts que lui-même ou l'unité, tel que 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, etc., s'appelle *nombre multiple*.

Les diviseurs exacts d'un multiple s'appellent sous-multiples. Ainsi, par exemple, 1, 2, 3, 4, 6, 8 et 12 sont sous-multiples de 24.

SUR LES QUATRE RÈGLES DE L'ARITHMÉTIQUE.

VI. Par l'ADDITION on ajoute deux ou plusieurs nombres pour en faire un seul. Le résultat se nomme *somme* ou *total*.

Par la SOUSTRACTION on retranche un nombre d'un autre nombre. Le résultat se nomme *reste, excédant* ou *différence*.

Par la MULTIPLICATION on prend un nombre appelé *multiplicande* autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre appelé *multiplicateur*. Le résultat se nomme *produit*. Le multiplicande et le multiplicateur se nomment les *deux facteurs* du produit.

Par la DIVISION on cherche combien de fois un nombre appelé *dividende* en contient un autre appelé *diviseur*. Le résultat se nomme *quotient*. Le dividende et le diviseur se nomment *les deux termes*.

VII. L'unité ne multiplie ni ne divise.

VIII. Multiplier par un nombre moindre que l'unité, c'est rendre plus petit le nombre que l'on multiplie; d'où il résulte que *multiplier* n'est pas toujours *augmenter*.

Diviser par un nombre moindre que l'unité, c'est rendre plus grand le nombre que l'on divise; d'où il résulte que *diviser* n'est pas toujours *diminuer*.

IX. Les deux facteurs d'un produit, l'un étant multiplié et l'autre divisé par un même nombre, le produit reste le même.

X. Les deux termes d'une division étant multipliés ou divisés par un même nombre, le quotient reste le même.

XI. Le produit général de plusieurs nombres est toujours le même dans quelque ordre qu'on les multiplie.

XII. Une quantité multipliée ou divisée par un nombre donne le même produit ou le même quotient que multipliée ou divisée successivement par les facteurs de ce nombre.

XIII. Si le quotient est plus grand que l'unité, le dividende est plus grand que le diviseur, et *vice versa.* S'il est l'unité, le diviseur est égal au dividende.

XIV. Si le produit de deux facteurs est moindre que leur somme, c'est que l'un d'eux est nécessairement l'unité.

XV. *Doubler, tripler, quadrupler, centupler....* un nombre, c'est le multiplier par 2, 3, 4, 100....

XVI. Une quantité tour-à-tour multipliée et divisée par un même nombre redevient ce qu'elle était. Donc, en ce cas, on abrège en se dispensant de multiplier et de diviser.

XVII. Le produit de deux nombres divisé par l'un d'eux donne l'autre.

XVIII. Le quotient multiplié par le diviseur donne le dividende ; le dividende divisé par le quotient donne le diviseur.

SUR LES DEUX TERMES D'UNE FRACTION.

XIX. Toute fraction se compose de deux termes: le premier que l'on prononce s'appelle *numérateur*, le second *dénominateur*. Le N. indique combien la fraction contient de parties égales de l'unité : le D. donne le nom de ces parties.

Ces deux termes d'une fraction sont assimilés aux deux termes d'une division. Le N. représente le dividende ; le D. le diviseur.

XX. Si le N. est égal au D. la fraction est égale à 1. Si le N. est plus petit que le D. la fraction est plus petite que 1. Si le N. est plus grand que le D. la fraction est plus grande que 1.

XXI. De deux fractions au même D., la plus grande est celle qui a le plus grand N. De deux fractions au même N., la plus grande est celle qui a le plus petit D.

XXII. Pour rendre une fraction plus grande, on multiplie le N., sans toucher au D. ou l'on divise le D. sans toucher au N.

Pour rendre une fraction plus petite, on divise le N.

sans toucher au D., ou l'on multiplie le D. sans toucher au N.

XXIII. Les deux termes d'une fraction étant multipliés ou divisés par un même nombre, sa valeur reste la même.

XXIV. Tout nombre entier peut toujours être mis *tel quel* sous la forme de fraction : il ne s'agit que de lui donner l'unité pour D.

XXV. Prendre une partie ou fraction quelconque d'un nombre, c'est le multiplier par cette fraction.

Ainsi, prendre les $\frac{2}{3}$ de $12 = 12 \times \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Donc si la fraction à prendre a l'unité pour N., on n'a qu'à diviser par le D. Ainsi, prendre la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$... d'un nombre, c'est diviser ce nombre par 2, 3, 4...

XXVI. Augmenter un nombre d'une fraction quelconque de lui-même, c'est le multiplier par une nouvelle fraction dont le N. égale la somme des deux termes donnés et dont le D. reste le même.

Ainsi, augmenter 60 des $\frac{5}{12} = 60 \times \frac{17}{12} = \frac{1020}{12} = 85$.

SUR LES RAPPORTS ET LES PROPORTIONS.

XXVII. On appelle *rapport* de deux nombres le quotient du premier nombre divisé par le second. Ainsi le rapport de 15 à 5 est 3.

On appelle *proportion géométrique* l'assemblage de deux rapports égaux. Ainsi 15 : 5 : : 6 : 2 est une proportion, attendu que le rapport de 15 à 5=3, et que le rapport de 6 à 2=aussi 3.

Le premier terme d'un rapport se nomme *antécédent ;* et le second *conséquent.*

Le premier et le quatrième terme d'une proportion s'appellent les *extrêmes ;* le deuxième et le troisième s'appellent les *moyens.*

Les moyens peuvent toujours changer réciproquement de place, sans que la proportion soit troublée.

XXVIII. Le produit des extrêmes égale toujours celui des moyens.

XXIX. On détermine le quatrième terme inconnu d'une proportion en divisant le produit des moyens par le premier terme.

SUR LES CARRÉS DES NOMBRES ET LEURS RACINES.

On appelle *nombre carré* ou *deuxième puissance* d'un nombre, ce nombre *une fois* multiplié par lui-même.

On appelle *racine carrée* ou *racine deuxième* d'un nombre, le nombre même qui a été élevé au carré.

Voici la série naturelle des carrés jusqu'à 100.

Carrés,	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100.
Racines,	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

Remarquez que la différence successive entre les carrés se surpasse toujours de 2 unités. Ainsi, de 1 à 4, la différence est 3 ; de 4 à 9, la différence est 5 ; de 9 à 16, la différence est 7, etc.

XXX. On appelle *nombre sourd, irrationnel, incommensurable* un nombre qui n'est point carré parfait, et conséquemment la racine de ces nombres n'est jamais qu'approximative.

XXXI. Pour augmenter d'une unité la racine carrée d'un nombre donné, ajoutez à ce nombre le double de sa racine $+1$. *Exemple :*

Soit le nombre 25 dont la $\sqrt{\ }=5$. Pour avoir 6 à la racine, ajoutez à 25 le double de $5+1=11$, et vous aurez $25+11=36$, dont la $\sqrt{\ }=6$.

Si la racine du nombre donné a un reste, retranchez le du double$+1$ de la racine, le nouveau reste sera le nombre à ajouter au nombre donné. *Exemple :*

Soit le nombre 53 dont la $\sqrt{\ }=7+$le reste 4. Pour avoir 8 à la racine, du double de la racine $7+1=15$, retranchez le reste 4, vous aurez 11. Or, $53+11=64$ dont la $\sqrt{\ }=8$.

XXXII. Pour diminuer d'une unité la racine carrée d'un nombre, retranchez de ce nombre le double de sa racine-1. *Exemple :*

Soit le nombre 64 dont la $\sqrt{\ }=8$. Pour n'avoir que 7 à la racine, retranchez de 64 le double de $8-1=15$, vous aurez $64-15=49$, dont la $\sqrt{\ }=7$.

Si la racine du nombre donné a un reste, ajoutez-le au double-1 de la racine, et retranchez le total du nombre donné. *Exemple :*

Soit le nombre 86 dont la $\sqrt{\ }=9+$ le reste 5. Pour que la racine $=8$, au double de la racine $9-1=17$, ajoutez le reste 5, vous aurez $17+5=22$. Or $96-22=64$, dont la $\sqrt{}=8$.

XXXIII. La preuve de l'extraction de la racine d'un nombre se fait en multipliant cette racine par elle-même et en joignant au produit le reste, s'il y en a un ; le total doit reproduire le nombre dont on a extrait la racine.

XXXIV. Connaissant la différence de deux nombres et celle de leurs carrés, le quotient de la seconde différence divisée par la première, donnel a somme des deux nombres, ce qui permet de déterminer immédiatement chacun d'eux.

SUR LES FACTEURS ET LES SOUS-MULTIPLES D'UN NOMBRE.

XXXV. Tout nombre a au moins deux facteurs ; il peut en avoir davantage. S'il n'a que deux facteurs, c'est nécessairement un nombre *premier* (V) et ces deux facteurs conséquemment sont ce nombre lui-même et l'unité.

XXXVI. Pour reproduire par la multiplication un nombre qui a plus de deux facteurs, il faut multiplier son facteur le plus grand par son facteur le plus petit ;

Ou son facteur immédiatement inférieur au plus grand, par son facteur immédiatement supérieur au plus petit ; ainsi de suite, en observant toujours le même ordre. *Exemple :*

Soit le nombre 24 qui a les *huit* facteurs 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24, nous aurons pour reproduire ce nombre: $24\times1=24$, ou $12\times2=14$, ou $8\times3=24$, ou $6\times4=24$.

Dans cet exemple, la quantité des facteurs est *paire ;* si elle est *impaire*, c'est alors le facteur *moyen* qui, multiplié par lui-même, produit le nombre en question. *Exemple :*

Soit le nombre 64 qui a les sept facteurs 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, nous aurons pour reproduire ce nombre: $64\times1=64$, ou $34\times2=64$, ou $16\times4=64$, ou $8\times8=64$.

De cet article nous déduirons les trois principes suivans :

XXXVII. Le plus grand facteur d'un nombre est ce nombre lui-même, et son plus petit facteur est l'unité.

XXXVIII. Le plus grand facteur d'un nombre pair (ce nombre lui-même excepté) est toujours la moitié de ce nombre, et son plus petit facteur (l'unité exceptée) est toujours 2.

XXXIX. Tout nombre dont la quantité des facteurs est *impaire* est un nombre *carré* dont le facteur *moyen* est la *racine*.

XL. Remarquons que tout nombre a toujours un *sous-multiple* de moins qu'il n'a de *facteurs*. En effet, un nombre, quel qu'il soit, figure lui-même parmi ses facteurs, mais il ne figure point parmi ses sous-multiples.

Remarquons encore que, pour produire un nombre par la multiplication de deux de ses sous-multiples, l'unité ne figurera jamais parmi ces sous-multiples, puisqu'elle ne saurait en aucune façon contribuer à ce résultat.

Ainsi donc, *en excluant l'unité des sous-multiples d'un nombre*, nous en déduirons que les principes établis, Articles XXXVI, XXXVIII et XXXIX, relativement aux fractions d'un nombre, s'appliquent sans exception à ses sous-multiples.

SUR LES NOMBRES PAIRS ET LES NOMBRES IMPAIRS.

XLI. La somme de deux nombres *pairs* est un nombre *pair*. Celle de deux nombres *impairs* est aussi un nombre *pair*. Celle d'un nombre *pair* et d'un nombre *impair* est un nombre *impair*.

XLII. La différence de deux nombres *pairs* est un nombre *pair*. Celle de deux nombres *impairs* est aussi un nombre *pair*. Celle d'un nombre *pair* et d'un nombre *impair* est un nombre *impair*.

XLIII. Le produit de deux nombres *pairs* est un nombre *pair*. Celui de deux nombres *impairs* est un nombre *impair*. Celui d'un nombre *pair* et d'un nombre *impair* est un nombre *pair*.

XLIV. Tout nombre *impair* n'a que des facteurs et des sous-multiples *impairs*.

XLV. Tout nombre *premier*, à l'exception du seul nombre 2, est un nombre *impair*.

SUR LES PROGRESSIONS.

XLVI. On appelle *progression arithmétique* une série de termes successivement augmentés ou diminués d'une même quantité. Dans le premier cas, la progression s'appelle *croissante* et dans le second, *décroissante*. La différence entre les deux termes s'appelle *raison*.

On appelle *progression géométrique* une série de termes successivement multipliés ou divisés par une même quantité. Dans le premier cas, la progression s'appelle *croissante*, et dans le second, *décroissante*. La quantité qui multiplie ou divise, s'appelle *raison*.

On considère cinq quantités dans les progressions: *le premier terme, le dernier terme, le nombre de termes, la somme des termes* et *la raison*.

XLVII. Le dernier terme d'une progression arithmétique se compose du premier terme, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.

Exemple. Soit : 2. 5. 8. 11. 14. 17, dont la raison est 3. Remarquez que le dernier terme 17 qui a *cinq* termes avant lui se compose du premier terme $2+$ (la raison $3\times 5)=17$.

XLVIII. La somme des termes d'une progression arithmétique se compose de la somme du premier terme et du dernier, multipliée par la moitié du nombre des termes.

Exemple. Soit $\div$ 5. 7. 9. 11. 13. 15, dont moitié du nombre des termes$=3$. Or le premier terme $5+$le dernier $15=20$ qui $\times 3=60$, la somme des six termes.

XLIX. Dans toute progression arithmétique, la somme du premier et du dernier terme égale celle du deuxième et de l'avant-dernier, ou celle du troisième et de l'antépénultième, ainsi de suite en observant toujours le même ordre.

Exemple. Soit $\div$ 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. Remarquez que le 1er et le 8e terme $=4+25=29$;
que le 2e et le 7e " $=7+22=29$;
que le 3e et le 6e " $=10+19=29$;
que le 4e et le 5e " $=13+16=29$.

Dans l'exemple qui vient d'être donné le nombre des termes est *pair*. Sil est *impair*, c'est alors le double du terme *moyen* qui égale la somme des autres pris deux à deux comme dessus.

Exemple. Soit ÷ 11. 16. 21. 36. 31. Remarquez
que le 1er et le 5e terme $=11+31=42$;
que le 2e et le 4e " $=16+26=42$;
que le 3e doublé $=21+21=42$.

L. Si le nombre des termes d'une progression arithmétique est *impair*, le terme *moyen* égale toujours la somme divisée par le nombre des termes, c'est-à-dire, que si ce nombre est 3 ou 5 ou 7.... le terme moyen $=\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{7}$.... de la somme des termes.

Exemple. Soit ÷ 10. 20. 30. 40. 50, dont la somme $=150$. Or cette somme divisée par 5, nombre des termes $=\frac{150}{5}=30$. Or, comme l'on voit, le terme moyen $=30$.

Si le nombre des termes est *pair*, les deux *moyens* égalent ensemble la somme divisée par moitié du nombre des termes.

Exemple. Soit ÷ 5. 10. 15. 20. 25. 30, dont la somme $=105$. Or 105 divisé par 3, moitié du nombre des termes $\frac{105}{3}=35$. Or les deux termes moyens $=15+20=35$.

LI. Le dernier terme d'une progression géométrique égale le premier, multiplié par la raison élevée à une puissance d'un degré égal au nombre des termes -1.

Exemple. Soit ∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 dont la raison est 2. Or, la progression ayant *cinq* termes, la raison 2 élevée à la *quatrième* puissance, nous donnera $2\times2\times2\times2=16$. Or, remarquez que le dernier terme $=$ le premier $3\times16=48$.

LII. Pour avoir la somme de tous les termes d'une progression géométrique, on multiplie le dernier terme par la raison, du produit on retranche le premier terme et l'on divise le reste par la raison diminuée de l'unité.

Exemple. Soit ∺ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 dont la raison est 3, et la somme 242. Or, le dernier terme $162\times3=486$. De 486 retranchons le premier terme 2, reste 484. Or, ce reste 484 : (la raison $3-1)=\frac{484}{2}=242$, somme des termes.

Remarque.—Tous ces divers principes sur les progressions s'appliquent *textuellement* aux progressions *croissantes*, mais, pour les rendre applicables aux progressions *décroissantes*, il n'y a uniquement qu'à changer les mots *premier* en *dernier* et *dernier* en *premier*.

SUR LES NOMBRES DIVISIBLES SANS RESTE.

LIII. Il importe, pour abréger le calcul dans une infinité de cas, de connaître les caractères qui rendent un nombre exactement divisible par un autre. Or, on peut toujours diviser sans reste :

Par 2, tout nombre *pair* sans exception.

Par 3, tout nombre *pair* ou *impair* dont la somme des chiffres, considérés comme des unités simples, est 3 ou un multiple de 3.

Par 4, tout nombre *pair* dont les deux derniers chiffres sur la droite sont divisibles par 4.

Par 5, tout nombre terminé par un 5 ou 0.

Par 6, tout nombre *pair* déjà divisible par 3.

Par 8, tout nombre *pair* dont les trois derniers chiffres sur la droite sont divisibles par 8.

Par 9, tout nombre *pair* ou *impair* dont la somme des chiffres est 9 ou un multiple de 9.

Par 10, 100, 1000.... tout nombre terminé par 0, 00, 000....

Par 11, tout nombre *pair* ou *impair* dont la somme des 1er, 3^{e}, 5^{e}, 7^{e} chiffres, etc., est égale à la somme des 2^{e}, 4^{e}, 6^{e}, 8^{e}...., ou dont la différence est 11 ou un multiple de 11.

Par 12, tout nombre *pair* déjà divisible par 3 et par 4.

Par 25, tout nombre *pair* ou *impair* dont les deux derniers chiffres sur la droite sont divisibles par 25.

PROPRIÉTÉS ET EXPLICATIONS DIVERSES.

LIV. De deux nombres inégaux, le plus grand égale (la somme + la différence) divisée par 2, et le plus petit égale (la somme — la différence) divisée aussi par 2; d'où il résulte que la somme augmentée de la différence, égale 2 fois le grand nombre, et que, diminuée de la différence, elle égale 2 fois le petit.

LV. Pour égaler deux nombres inégaux, *sans altérer leur somme*, on diminue le grand de moitié de la différence, et l'on augmente le petit de l'autre moitié.

LVI. La différence entre deux nombres ne peut être supérieure ni même égale au grand nombre, mais elle peut égaler ou surpasser le petit.

LVII. La plus petite différence possible entre deux nombres entiers *pairs*, ou entre deux nombres entiers *impairs*, est 2.

LVIII. Sachant de combien de fois *A* est plus grand que *B*, on détermine à l'instant de combien de fois *B* est plus petit que *A*, en conservant le même N. à la fraction donnée, et formant un nouveau D. de la somme des deux termes. *Exemple* :

A étant > B de $\frac{1}{3}$, B est < A de $\frac{1}{4}$.
A étant > B des $\frac{7}{5}$, B est < A des $\frac{7}{12}$.

LIX. Sachant de combien de fois A est plus petit que B, on détermine à l'instant de combien de fois B est plus grand que A, en conservant le même N. à la fraction donnée, et formant un nouveau D. du D. donné dont on soustrait le N. *Exemple:*

A étant < B de $\frac{1}{5}$, B est > A de $\frac{1}{4}$.
A étant < B des $\frac{4}{9}$, B est > A des $\frac{4}{5}$.

LX. Sachant que le nombre A égale telle partie du nombre B, on détermine à l'instant quelle partie du nombre A égale le nombre B, en renversant les deux termes de la fraction donnée. *Exemple:*

A étant $=\frac{4}{5}$ de B, B $=\frac{5}{4}$ de A.
A étant $=\frac{7}{2}$ de B, B $=\frac{2}{7}$ de A.

LXI. Sachant combien la somme de deux nombres contient leur différence, on détermine le rapport d'un nombre à l'autre de la manière suivante.

Mettez ce nombre de fois sous la forme de fraction, et avec cette première fraction formez en une seconde dont le N. soit égal au N. de la première, *moins* son D, et dont le D. soit égal au N. de la première *plus* son D. Cette seconde fraction exprimera le rapport du petit nombre au grand, et *renversée* elle exprimera le rapport du grand au petit.

Exemple. Soient les nombres 5 et 7 dont la somme $=12$ et la différence 2 ; l'une contient donc 6 fois l'autre. Or, 6 en fraction (XXIV) $=\frac{6}{1}$, et formant notre seconde fraction ainsi qu'il est dit, nous aurons $\frac{5}{7}$, c'est-à-dire que le petit nombre $=\frac{5}{7}$ du grand.

Autre exemple. Soient les nombres 60 et 35 dont la somme $=95$ et la différence 25 ; l'une contient donc 3 fois $\frac{4}{5}$ l'autre. Or, $3\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$, ce qui, suivant ce qui est prescrit donnera pour seconde fraction $\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$: en effet $45=\frac{7}{12}$ de 60.

LXII. Tout nombre de deux chiffres inégaux, *lu au rebours*, diffère de ce qu'il est de 9 ou d'un multiple de 9. S'il diffère de 9, la différence entre les deux chiffres est 1. S'il diffère de 2 fois 9, de 3 fois 9...., la différence entre les deux chiffres est 2, 3... Ainsi, le nombre 81, lu au rebours, $=18$; de 81 à 18 la différence $=63$. Or, 63 $=$ *sept* fois 9. Or, la différence des chiffrés 8 et 1 $=7$.

LXIII. Plus la différence entre deux nombres *formant une même somme* est petite, plus leur produit est grand. *Exemple:*

$$\text{No. 1. Somme 8.}\begin{cases}1\times7=\ 7\\2\times6=12\\3\times5=15\\4\times4=16\end{cases}\qquad\text{No. 2. Somme 9.}\begin{cases}1\times8=\ 8.\\2\times7=14.\\3\times6=18.\\4\times5=20.\end{cases}$$

Or, les deux exemples ci-dessus nous fournissent les remarques suivantes:

1° L'un des deux nombres qui, multipliés l'un par l'autre, donnent le plus petit produit, est toujours l'unité, que la somme soit *paire* ou *impaire ;*

2° Si la somme est *paire*, n° 1, chacun des deux nombres qui donnent le plus grand produit égale la moitié de la somme ;

3° Si la somme est *impaire*, n° 2, les deux nombres qui donnent le plus grand produit diffèrent entre eux de l'unité.

LXIV. Il est des quantités qui, d'après la nature de la question, ne peuvent évidemment être fractionnaires. Ainsi, par exemple, lorsqu'à propos d'*ouvriers*, d'*oiseaux*, d'*œufs*, etc., on parle de *demi*, *tiers*, *quarts*...., cela suppose nécessairement que ces quantités sont exactement divisibles par 2, 3, 4....

Or, pour connaître sans tâtonnement le nombre par lequel une quantité de cette espèce devient divisible, si on l'augmente de l'une de ses parties, additionnez les deux termes de la fraction qui exprime cette partie, la somme sera la *R*.

Ainsi, par exemple, si l'on augmente des $\frac{5}{7}$ le contenu d'un panier d'œufs, j'en conclus que ce contenu, d'abord exactement divisible par 7, est actuellement divisible par $7+5=R.$ 12.

Si au contraire l'on diminue la quantité de l'une de ses parties, vous déterminerez le nombre par lequel elle devient divisible, en retranchant le N. du D. Le reste sera la *R.*

Ainsi, par exemple, si l'on diminue des $\frac{5}{7}$ les oiseaux d'une volière, j'en conclus que leur nombre d'abord exactement divisible par 7 est actuellement divisible par $7-5=R.\,2.$

LXV. Il est une opération qui revient assez souvent dans mes solutions. Afin que le lecteur la comprenne parfaitement, je vais en donner ici un exemple explicatif.

Supposons qu'il s'agisse de diviser $(x+4)$ en deux parties, dont l'une = les $\frac{3}{5}$ de l'autre. Faites la somme des deux termes de la fraction donnée, vous aurez $3+5=8$, ce qui indique que la petite partie doit avoir les $\frac{3}{8}$ du nombre $(x+4)$ et la grande les $\frac{5}{8}$.

Opération : $(x+4)\,\frac{3}{8}=\left(\frac{3x+12}{8}\right)$le petit nombre.

$(x+4)\,\frac{5}{8}=\left(\frac{5x+20}{8}\right)$le grand nombre.

ABRÉGÉ D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS.

1. L'Algèbre est une méthode générale de computation dans laquelle, un nombre, une quantité, et leurs différentes relations, sont exprimés au moyen de lettres et de signes. On emploie pour cela les lettres de l'alphabet et les signes usités dans l'arithmétique.

2. Les quantités *connues* ou *déterminées* sont généralement représentées par les premières lettres de l'alphabet, comme a, b, c, etc. etc.

3. Les quantités *inconnues* ou *indéterminées* sont ordinairement exprimées par les dernières lettres de l'alphabet, comme x, y, z, etc. etc.

4. Le nombre *de fois* que les quantités doivent être prises comme 2 *fois a*, *trois fois b* est indiqué par un chiffre placé devant le nombre; comme $2a$, $3b$, $5ax$. Ces nombres 2, 3, 5, sont appelés *coefficient* de ces quantités. Quand il n'y a pas de *coefficient* devant une quantité, elle est censée avoir le chiffre 1. Ainsi a est le même que $1a$.

5. Le signe $=$(lisez égal à) placé entre deux quantités, annonce que les quantités sont égales entr'elles. Ainsi 12 deniers$=$1 chelin; 3 ajoutés à $5=8$; $2a$ ajoutés à $4a=6a$. Ce signe est appelé *signe d'égalité.*

6. Le signe $+$ (lisez plus) signifie que les quantités qui sont placées devant lui doivent être *additionnées.* Ainsi $3+2$ est la même chose que 5; et $a+b+x$, est la même somme que a, b et x, quelles que soient les valeurs de a, b, et x.

Qu'est-ce que l'Algèbre? Quels sont les signes usités pour remplacer les nombres ou quantités? Quelles sont les lettres de l'alphabet employées à représenter les quantités connues ou déterminées? Quelles sont celles employées à représenter les quantités inconnues ou indéterminées? Qu'est-ce qu'on appelle coefficient? Quand est-ce que le coefficient peut être omis? Quel est le signe d'égalité? Quel est l'usage du signe $+$?

7. Le signe — (lisez moins) signifie que la quantité devant laquelle il est placé doit être *soustraite*. Ainsi $3-2$ est la même chose que 1 ; $a-b$ est la *différence* de b ôté de a ; et $a+b-x$ signifie que x doit être soustrait de la somme de a et b.

8. Les quantités qui ont le signe plus ou + sont appelées quantités *positives*, et celles qui ont le signe — sont appelées quantités *négatives*. Toute quantité écrite sans signe, sans coefficient, sans exposant, est toujours censée avoir le signe +, le coefficient 1 et l'exposant 1 ; ainsi a est la même chose que $+1a$.

9. Le signe × (lisez multiplié par) est le signe de la multiplication et signifie que les quantités entre lesquelles il est placé doivent être multipliées. Ainsi 6×2 indique que 6 doit être multiplié par 2 ; et $a\times b\times c$, signifie que a, b, c, doivent être multipliés ensemble. En place de ces signes on se contente quelquefois de mettre un seul point. Ainsi a. b. c, signifie la même chose que $a\times b\times c$. Le produit des quantités exprimées par des lettres est ordinairement exprimé en plaçant les lettres à côté *l'une de l'autre* selon la position qu'elles tiennent dans l'alphabet. Ainsi, le produit de a par b est exprimé par ab ; celui de a, b, x, par abx ; et celui de 3, a, x, y, par $3axy$.

10. En algèbre, le mot *donc* revient souvent. Pour l'exprimer on fait quelquefois usage du signe $\therefore$ ainsi la formule " *donc* $a+b$ est égal à $c+d$ " s'exprime en disant $\therefore a+b=c+d$. *Exemples :*

(1.) Dans l'expression algébrique, $a+b-c$. Soit $a=9$, $b=7$, $c=3$; reviennent à ceci

$$\begin{aligned} a+b-c &= 9+7-3 \\ &= 16-3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

(2.) Ex. Dans l'expression $ax+ay-xy$. Soit $a=5$, $x=6$, $y=7$. On a

$$\begin{aligned} ax+ay-xy &= 5\times 2+ 5\times7-2\times7 \\ &= 10+35-14 \\ &= 45-14 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Comment lisez-vous le signe —? Quentendez-vous par quantité positive et quantité négative ? Comment écrit-on le signe de la multiplication ? Y a-t-il quelqu'autre signe pour la multiplication ? Quand est-ce qu'on n'emploie pas de signe ? Quel est le signe usité pour remplacer le mot donc ?

(3.) Ex. Si $a=5$, $b=4$, $c=3$, $d=2$, $x=1$, $y=0$, trouvez les valeurs numériques des expressions suivantes :

(1.) $a+b+c+x$. *R.* 13.
(2.) $a-b+c-x+y$. *R.* 3.
(3.) $ab+3ac-bc+4cx-xy$. *R.* 65.
(4.) $abc-abd+bcd-acx$. *R.* 29.
(5.) $3abc+4acx-8bdx+axy$. *R.* 176.

11. Le signe $\div$ (lisez *divisé par*) est le *signe* usité pour la *division* et signifie que la première des deux quantités entre lesquelles il est placé doit être divisée par la dernière. Ainsi $8\div2$ est équivalent à 4. Mais cette division est plus simplement exprimée en mettant la première quantité pour numérateur et la 2me pour dénominateur d'une fraction : ainsi $\frac{a}{b}$ signifie que a doit être *divisé par* b et, pour plus de brièveté, lisez a par b.

EXEMPLES.

Ex. (1.) Si $a=2$, $b=3$ trouvez la valeur de

(1.) $\frac{3a}{5b}=\frac{3\times2}{5\times3}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,

(2.) $\frac{2a+b}{8a-3b}=\frac{2\times2+3}{8\times2-3\times3}=\frac{4+3}{16-9}=\frac{7}{7}=1$.

Ex. (2.) Si $a=3$, $b=2$, $c=1$ trouvez les valeurs numériques de $\frac{3a+c}{4b+a}$ *R.* $\frac{10}{11}$.

(2.) $\frac{a+2b-c}{3a+b-5c}$. *R.* 1.

(3.) $\frac{ab+ac-bc}{2ab-2ac+bc}$. *R.* $\frac{7}{8}$

12. Quand une quantité est multipliée par elle-même un certain nombre de fois, le produit s'appelle *puissance* de la quantité.

Par quel signe la division est elle indiquée ? Quel est son nom ? La division ne peut-elle pas s'indiquer d'une autre manière ? Qu'est-ce qu'on appelle puissance d'une quantité ?

13. Les *puissances* sont ordinairement indiquées en plaçant à la droite une petite *figure* ou *chiffre* qui indique combien de fois on doit multiplier la quantité par elle-même. Ainsi:

a - - - - - la 1re puissance est indiquée par a ou a^1.
$a \times a$ - - - la 2me puissance ou *carré* de a par a^2.
$a \times a \times a$ - la 3me puissance ou *cube* de a par a^3.
$a \times a \times a \times a$ la 4me puissance de a par a^4.

Les petites figures ^{2}, ^{3}, ^{4}, etc., mises au-dessus de la lettre ou quantité, sont appelées *exposant* de la puissance de a.

14. Les *racines* des quantités sont les quantités qui ont été multipliées par elles-mêmes; ainsi la racine carrée du nombre 16 est 4, parce que $4 \times 4 = 16$, et la racine cubique de 27 est 3, parce que $3 \times 3 \times 3 = 27$.

15. Pour exprimer les *racines* des quantités, le signe est $\sqrt{}$ avec un chiffre placé au-dessus indiquant la racine ou puissance. Ainsi:

$\sqrt[2]{a}$ ou $\sqrt{a}$, exprime la racine carrée de a.
$\sqrt[3]{a}$ " " " la racine cubique de a.
$\sqrt[4]{a}$ " " " la racine 4me de a.

EXEMPLES.

Ex. (1.) Si $a=3$, $b=2$, alors $a^2=3 \times 3=9$, $a^3=3 \times 3 \times 3=27$, $b^4=2 \times 2 \times 2 \times 2=16$.

Ex. (2.) Si $a=64$, alors $\sqrt{a}=\sqrt[2]{64}=8$, $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4 \times 4 \times 4}=4$, $\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{64}=2$.

Ex. (3.) Dans l'exposition $\frac{ax^2+b^2}{bx-a^2-c}$, soit $a=3$, $b=5$, $c=2$, $x=6$, quelle est la valeur numérique?

Ici $ax^2+b^2=3 \times 6 \times 6+5 \times 5=108+25=133$ et $bx-a^2-c=5 \times 6-3 \times 3-2=30-9-2=19$.

$$\therefore \frac{ax^2+b^2}{bx-a^2-c}=\frac{133}{19}=7$$

Comment indique-t-on les *puissances ?* Qu'est-ce que la racine des quantités ? Par quel signe les racines des quantités sont-elles exprimées ?

Ex. (4.) Si $a=1$, $b=3$, $c=5$, $d=0$, trouvez les valeurs de
(1.) a^2+2b-c. *R.* 2.
(2.) $a^2+3b^2-c^2$. *R.* 3.
(3.) $a^2+2b^2+3c^2+4d^2$. *R.* 94.
(4.) $3a^2b-2b^2c+4c^2-4a^2d$. *R.* 19.
(5.) a^3+b^3. *R.* 28.
(6.) $\frac{a^3}{3}+\frac{b^3}{3}+\frac{c^3}{3}$. *R.* 51.

Ex. (5.) Soit $a=64$, $b=81$, $c=1$: trouvez les valeurs de
(1.) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. *R.* 17.
(2.) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. *R.* 18.
(3.) $\sqrt{abc}$. *R.* 72.

16. Quand plusieurs quantités doivent être prises comme une *quantité*, elles sont renfermées entre crochets : ( ), [ ], { }. Ainsi, $(a+b-c).(d-e)$, signifie que la quantité représentée par $a+b-c$, doit être multipliée par $d-e$; si $a=3$, $b=2$, $c=1$, $d=5$, $e=2$, $a+b-c=4$, $d-e=3$, et donc $(a+b-c).(d-e)=4\times3=12$.

Il faut prendre le plus grand soin d'observer comment les crochets sont employés et les effets qu'ils doivent produire. Ainsi $(a+b).(c+d)$, $(a+b)\,c+d$, $a+bc+d$, sont trois différentes expressions ; car si $a=3$, $b=2$, $c=3$, $d=5$;

(1.) $(a+b).(c+d)=(3+2).(3+5)=5\times8=40$.
(2.) $(a+b)\,c+d=(3+2)\,3+5=5\times3+5=20$.
(3.) $a+bc+d=3+2\times3+5=3+6+5=14$.

17. Outre les crochets, une ligne appelée ***vinculum*** est quelquefois employée en place des crochets pour indiquer que les quantités doivent être prises collectivement. Ainsi $a-\overline{b-c}$ est la même chose que $a-(b-c)$. La ligne qui sépare le numérateur du dénominateur d'une fraction, est une espèce de ***vinculum*** correspondant en réalité dans la ***division*** aux crochets employés dans la ***multiplication*** ; Ainsi, $\frac{a+b-c}{5}$ indique que toute la quantité $a+b-c$ doit être divisée par 5.

Quand est-ce que les crochets doivent être employés ? Qu'est-ce qu'un vinculum ? Peut-on regarder la ligne qui sépare le numérateur et le dénominateur d'une fraction comme un vinculum ?

18. Les quantités semblables sont représentées par les mêmes lettres ou les *mêmes combinaisons de lettres ;* ainsi $5a$, et $7a$, $4ab$ et $9ab$, $2bx^2$ et $6bx^2$, etc., sont appelés quantités *semblables,* les quantités *différentes* sont représentées par *différentes lettres* ou *différentes combinaisons de lettres ;* ainsi $4a$, $3b$, $7ax$, $5bx^2$, etc., sont dites quantités *dissemblables.*

19. Les quantités algèbriques ont aussi différentes dénominations, suivant le nombre de termes (joints par les signes $+$ ou $-$). Ainsi, a, $2b$, $3ax$, etc., quantités consistant en un seul terme, sont appelées quantités simples ou *monome ;* $a+x$ quantité consistant en deux termes, est appelée *binome.*

$bx+y-z$, quantité consistant en trois termes, est appelée *trinome,* à 4 termes *quatrinome,* mais, en général : toute quantité qui a plus d'un terme est appelée *polynome.*

CHAPITRE II.

ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION, ET DIVISION DES QUANTITÉS ALGÈBRIQUES.

ADDITION.

20. L'Addition algèbrique consiste à réunir ensemble plusieurs quantités *de même espèce* unies par les mêmes signes, et d'y joindre les quantités *dissemblables* par leurs signes respectifs. De la division des quantités algèbriques en *positives, négatives, semblables* et *dissemblables,* naissent trois différents cas pour l'addition.

1er Cas.

Additionner les quantités semblables avec leurs signes semblables.

21. Dans ce cas, voici la règle " Additionnez les coefficients des différentes quantités arithmétiquement,

---

Quelles sont les quantités semblables et les quantités dissemblables ? Qu'est-ce qu'un monome ? Qu'est-ce qu'un binome et un trinome ? Qu'est-ce qu'un polynome ? En quoi consiste l'addition algébrique ? Combien de cas présente-t-elle ?

et donnez au résultat le signe commun et la lettre ou les lettres communes, car il est évident suivant les principes d'arithmétique que $+2a$, $+3a$ et $+5a$ additionnés ensemble, la somme sera $+10a$; et que $-3b^2, -4b^2, -8b^2$, la somme sera $-15b^2$.

1er Ex.

$$\begin{array}{r} 2x+3a-4b \\ 3x+2a-5b \\ 4x+8a-7b \\ 9x+4a-6b \\ 5x+7a-9b \\ \hline 23x+24a-31b \\ \hline\hline \end{array}$$

2me Ex.

$$\begin{array}{r} 7x^2+3xy-5bc \\ 9x^2+2xy-7bc \\ 11x^2+5xy-4bc \\ x^2+4xy-bc \\ x^2+9xy-2bc \\ \hline 29x^2+23xy-19bc \\ \hline\hline \end{array}$$

3me Ex.

$$\begin{array}{r} 4a^3-3a^2+1 \\ 2a^3-a^2+17 \\ 5a^3-2a^2+4 \\ 3a^3-7a^2+3 \\ a^3-a^2+10 \\ \hline 15a^3-14a^2+35 \\ \hline\hline \end{array}$$

4me Ex.

$$\begin{array}{r} 3x^3+4x^2-x \\ 2x^3+x^2-3x \\ 7x^3+2x^2-2x \\ 4x^3+x^2-x \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$$

5me Ex.

$$\begin{array}{r} 7a^3-3a^2b+2ab^2-3b^3 \\ 4a^3-a^2b+ab^2-b^3 \\ a^3-2a^2b+3ab^2-5b^3 \\ 5a^3-3a^2b+4ab^2-2b^3 \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$$

6me Ex.

$$\begin{array}{r} 2x^2y-3x+2 \\ 4x^2y-2x+1 \\ 3x^2y-5x+10 \\ x^2y-x+15 \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$$

Dans ces exemples on peut observer que quelques unes des quantités n'ont pas de *coefficient*. Dans ce cas, elles sont censées avoir l'*unité*. Ainsi, en additionnant la 1re colonne du 2me Ex., nous disons, $1+1+11+9+7=29$; et dans la troisième, $2+1+4+7+5=19$, et ainsi du reste.

II. Cas.

Additionner les quantités semblables avec des signes non semblables.

22. Puisque la quantité composée $a+b-c+d-e$, etc. est positive ou négative, selon que la somme des termes positifs est plus ou moins grande que la somme des termes négatifs, on mettra le signe plus ou moins au résultat ; ainsi $2a-4a+7a-3a$ sera $+2a$, et les quantités $7b^2-5b^2+2b^2-8b^2$ sera $-4b^2$; car dans le premier cas l'excès de la somme de termes positifs est de $2a$, au-dessus de la somme des termes négatifs ; et dans le dernier cas, au contraire, la somme des termes négatifs sur-

passe de $-4b^2$ la somme des termes positifs. En règle générale, on fait la somme des coefficients des termes *positifs* semblables et aussi celle des termes *négatifs* semblables, puis on soustrait la plus petite somme de la plus grande ; à la différence on met le signe de la plus grande somme avec les lettres communes, et le résultat est la somme demandée.

Si la somme des termes positifs est *égale* à celle des termes négatifs, la *différence* est égale à 0, et conséquemment la somme des quantités sera égale à 0 ; comme dans la *seconde* colonne du 2me Exemple suivant.

1er Ex.	2me Ex.	3me Ex.
$4x^2-3x+4$	$-7ab+3bc-xy$	$-5x^3+13x^2$
$-2x^2+x-5$	$-ab+2bc+4xy$	$-2x^3-4x^2$
$3x^2-5x+1$	$3ab-bc+2xy$	$7x^3+x^2$
$7x^2+2x-4$	$-2ab+4bc-3xy$	$9x^3-14x^2$
$-x^2-4x+13$	$5ab-8bc+xy$	$-13x^3-2x^2$
$11x^2-9x+9$	$-2ab\quad+3xy$	$-4x^3-6x^2$

4me Ex.	5me Ex.	6me Ex.
$4x^3-2x+3y$	$5a^3-2ab+b^2$	$4x^2y^2+2xy-3$
$-x^3+4x-y$	$-a^3+ab-2b^2$	$-x^2y^2-xy-1$
$7x^3-x+9y$	$4a^3-3ab+b^2$	$3x^2y^2+4xy-5$
$9x^3+21x-2y$	$2a^3+4ab-4b^2$	$-9x^2y^2-2xy+9$

III. Cas.

23. Il ne reste maintenant que le cas où des quantités *dissemblables* doivent être additionnées ensemble ; il faut les mettre sur une même ligne, jointes par leurs signes respectifs ; ainsi, la somme de $3x, -2a, +5b, -4y$, est $3x-2a+5b-4y$; excepté quand il y a des quantités *semblables* et d'autres *dissemblables*, comme dans les exemples suivants, où les expressions peuvent être simplifiées en réunissant ensemble telles quantités qui peuvent se confondre dans une même somme.

1er Ex.

$$\begin{array}{l}
3ab+\ x-\ y\\
4c\ -2y+\ x\\
5ab-3c+\ d\\
4y\ +\ x^2-2y\\
\hline
8ab+2x-\ y+c+d+x^2\\
\hline\hline
\end{array}$$

Additionnant ensemble les quantités semblables et commençant par $3ab$, nous avons $3\ ab+5ab=8ab$; $+x+x=+2x$;$-y-2y+4y-2y=-y$; $4c-3c=+c$; en outre desquelles sont les deux quantités $+d$ et $+x^2$, qui n'ont pas de semblables; la somme est donc $8ab+2x-y+c+d+x^2$.

2me Ex.

$$\begin{array}{l}
4x^3-2xy+1\ -3y+4x^2\\
4y\ +3x^3\ -y^2+xy-\ x^2\\
5x^3-2x\ +y\ -15+\ y^2\\
\hline
3x^2-xy-14\ +2y+12x^3-2x.\\
\hline\hline
\end{array}$$

Ici, $4x^2-x^2=3x^2$
$-2xy+xy=-xy$
$+1-15=-14$
$-3y+4y+y=+2y$
$+4x^3+3x^3+5x^3=+12x^3$
$-y^2+y^2=0$
$-2x=-2x.$

EQUATIONS SIMPLES.

24. Quand deux quantités algébriques sont liées ensemble par le signe $(=)$ l'expression est appelée *équation*. Les équations dans leur application à la solution des problèmes consistent à égaler des quantités *connues* avec des quantités *inconnues*. Ainsi $2x+3=x+7$ est une équation dans laquelle x est une *inconnue*, et sa valeur est telle que deux fois le nombre qu'elle représente $2x+3=x+7$ de l'autre quantité. Le nombre qui *satisfait* à la question est évidemment 4 ; puisque $2\times4+3=11$, et $4+7=11$. La valeur de la quantité *inconnue* dans cet exemple a été trouvée par la simple inspection ; mais ordinairement on l'obtient par un calcul qui est appelé *solution* de l'équation.

25. En effectuant la solution d'une question, les procédés à suivre doivent être fondés sur divers axiômes qui doivent concorder ensemble ; ils sont au nombre de 7.

Qu'est-ce qu'on entend par équation ? Qu'entend-on par solution d'une équation ?

(1.) Les quantités égales chacune à une même quantité, sont égales entr'elles.

(2.) Les quantités égales entr'elles ajoutées à des quantités égales entr'elles, forment des sommes égales entr'elles.

(3.) Les quantités égales entr'elles ôtées des quantités égales entr'elles, laissent des restes égaux entr'eux.

(4.) Les quantités égales entr'elles ajoutées à des quantités inégales entr'elles, forment des sommes inégales entr'elles.

(5.) Les quantités égales entr'elles ôtées de quantités inégales, laissent des restes inégaux entr'eux.

(6.) Les quantités doubles, triples, quadruples, etc., de quantités égales entr'elles, sont égales entr'elles.

(7.) Les quantités qui sont les moitiés, les $\frac{1}{3}$, les $\frac{1}{4}$, etc., de quantités égales entr'elles, sont égales entr'elles.

Ces axiômes (excepté le premier) peuvent-être *généralisés*, et tous inclus dans ce *principe très-important* que l'on doit soigneusement conserver dans l'esprit, SAVOIR : que " tout ce que l'on change d'un côté d'une équation, on doit le changer de l'autre."

26. Si une équation ne contient que la première *puissance* de l'inconnue, ou des quantités dans leur simple forme, elle est dite *équation simple* ou équation du premier degré.

SUR LA SOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

27. Les règles qui sont absolument nécessaires pour la solution, d'une simple équation, contenant une seule inconnue, peuvent se réduire à quatre, pour chacune desquelles on donnera un exemple.

Quels sont les axiômes employés dans les solutions des équations, et quel est le principe général qu'on peut baser sur eux ? Qu'est-ce qu'une simple équation ou équation du premier degré ?

PREMIÈRE RÈGLE.

« Si la quantité inconnue a un coefficient, sa valeur peut être trouvée en divisant les deux côtés de l'équation par ce coefficient; cette règle est fondée sur cet axiôme," que si des quantités égales sont divisées par un même nombre, les quotients seront toujours égaux.

Ex. 1. Soit $2x=14$, *divisant* les deux côtés de l'équation par 2, nous avons $\frac{2x}{2}=\frac{14}{2}$; mais $\frac{2x}{2}=x$, et $\frac{14}{2}=7$, $\therefore x=7$.

Ex. 2. Soit $ax=b+c$; alors $\frac{ax}{a}=\frac{b+c}{a}$; mais $\frac{ax}{a}=x$; $\therefore x=\frac{b+c}{a}$.

Ex. 3. Soit $x+2x+4x+6x=52$. Additionnant les termes, nous aurons $13x=52$. Divisant chaque côté par 13, nous aurons $x=4$.

Ex. 4. Soit $6x-4x+3x-x=36$. Les termes étant additionnés commè dans le second cas de l'addition, nous aurons $4x=36$. Divisant chaque côté de l'équation par 4 nous aurons $x=9$.

Ex. 5. Soit $10x=150$. *R.* $x=15$.
Ex. 6. Soit $3x+4x+7x=84$. *R.* $x=6$.
Ex. 7. Soit $8x-5x+4x-2x=25$. *R.* $x=5$.
Ex. 8. Soit $12x-3x-4x-x=24$. *R.* $x=6$.

28. Les questions d'arithmétique peuvent aisément être mises sous la forme d'équation, et on verra par les exemples suivants quelle relation l'arithmétique a avec l'algèbre pour toutes les opérations.

Si 30*s.* sont le prix de 5*lbs. de thé*, quel est *le prix* de 1*lb.?*

(1.) Le *prix* d'une livre est ce qu'on cherche.

(2.) Il est clair que le *prix* d'une livre $\times 5$ donne le prix de 5 livres.

(3.) Mais le prix de 5 livres, d'après la question = 30*s*.

(4.) Ainsi le prix de la livre en chelins $\times 5 = 30s$.

(5.) Et en divisant par 5 nous obtenons le prix d'une livre $= 6s$.

Pour les diverses formes de cette solution exprimée algébriquement, prenons les exemples suivants:

(1.) Soit $x =$ le prix de 1*lb.* en chelins.

(2.) Alors $5x =$ le prix de la livre en chelins $\times 5$ *lbs.*

(3.) Mais le prix de 5*lb.* par la question est de 30*s.*

(4.) Donc $5x = 30s$.

(5.) Et $\therefore x = 6s$ qui est le prix d'une livre $= R$.

On voit par les formules (2) et (3) de cet exemple qu'il y a deux manières d'exprimer la même chose et par la formule (4) que ces expressions sont égales chacune à chacune. Ceci a lieu dans tous les problèmes mis en équation. Comme second exemple, prenons le problème suivant:

Une maison et un verger sont loués £28 par an, mais le loyer de la maison est 6 fois autant que celui du verger. Trouvez le loyer de chaque.

Le loyer de la maison est égal à celui de 6 vergers; nous pouvons donc changer la maison en 6 vergers et nous aurons: *Le loyer du verger* +6 fois *le loyer du verger* =£28, prenant la somme des loyers du verger nous avons 7 fois le *loyer du verger* =£28, et la 7^{me} partie de chaque côté de l'équation étant prise, le *loyer du verger* =£4 ; et donc le *loyer de la maison* =6 fois le loyer du verger =6 × £4 = £24.

Maintenant donnons ces opérations en termes algébriques. Soit x le *loyer du verger* en louis,

alors $6x$ sera celui de *la maison.*

Mais par la condition de la question, *le loyer du verger* +6 fois *le même loyer* =£28.

Donc $x + 6x =$ £28.

ou $7x =$ £28,

et, divisant chaque membre de l'équation par 7,
$x = £4$, loyer du verger,
et $6x = 6 \times £4 = £24$, loyer de la maison.

Supposons encore la question suivante et proposons en la solution : " Divisez le nombre 35 en deux parties telles qu'une des parties excède l'autre de 9." Une personne sans notions d'algèbre, peut sans grande difficulté résoudre la question de la manière suivante.

(1.) On voit d'abord qu'il y a une partie plus *grande* et une partie plus *petite*.

(2.) Il faut que la plus grande partie excède la plus petite de 9.

(3.) Mais il est évident que la plus grande et la plus petite ajoutées ensemble, doivent égaler le nombre 35.

(4.) Si alors on substitue pour la plus grande part son équivalent, savoir : *la plus petite part augmentée de* 9"," il suit que la petite part augmentée de 9, avec l'*addition* de la dite petite part=35.

(5.) Ou en d'autres termes on peut dire que 2 *fois* la petite part avec l'*addition* de 9 est égale à 35.

(6.) Ainsi *deux fois la petite part* doit être égale à 35, après en avoir *soustrait* 9.

(7.) Donc deux fois la petite part est égale à 26.

(8.) Il faut conclure que la *petite part* est égale à 26 *divisés* par 2 ; c'est-à-dire à 13.

(9.) Et conséquemment que la *grande part* excèdant la petite de 9, doit égaler 22.

Mais en suivant la méthode algébrique, *les différentes parties de cette solution peuvent être exposées beaucoup plus brièvement.*

(1.) Soit la petite part $= x$.
(2.) Alors la plus grande sera $= x + 9$.
(3.) Mais la plus grande et la plus petite $= 35$.
(4.) Donc $x + 9 + x = 35$.
(5.) Ou $2x + 9 = 35$.
(6.) Donc $2x = 35 - 9$.

(7.) Ou $2x$ $=26.$

(8.) Donc x (petite part) $=\frac{26}{2}=13.$

(9.) Et $x+9$ (la plus grande) $=13+9=22.$

29. Ayant expliqué la manière dans laquelle les diverses parties d'une question d'arithmétique peuvent être exprimées en langage algébrique, nous allons en donner des exemples.

PROBLÈMES.

PROB. 1er. Un panier de dessert contient 30 pommes et poires, mais il y a 4 fois autant de poires que de pommes. Combien y en a-t-il de chaque sorte?

Soit $x=$le nombre de pommes;

comme il y a 4 fois autant de poires que de pommes,

$4x=$le nombre de poires.

Mais, par la question, les pommes et les poires ensemble $=30.$

Donc $x+4x=30.$

Additionnant les termes contenant x, on a $5x=30.$

Divisant chaque côté de l'équation par 5,

$x=6$, nombre de pommes,

Donc le nombre de poires$=4x=4\times6=24.$

PROB. 2. Dans un mélange de 16 livres de thé noir et vert, il y a trois fois autant de noir que de vert. Trouvez la quantité de chaque sorte?

Soit $x=$le nombre de livres de thé vert,

Alors $3x$ sera " " " noir.

Mais le thé noir$+$le vert$=16$ livres.

Donc $x+3x=16$ livres.

Additionnant les termes qui contiennent x,

$4x=16$ livres.

Divisant chaque côté de l'équation par 4,

$x=4$ livres de thé vert,

Donc le thé noir$=3x=3\times4=12$ livres.

PROB. 3. On fait un mélange de thé vert et de thé noir par égale quantité; mais le thé noir coûte 5 chelins et le vert 7. Combien y en aura-t-il de chaque sorte pour 4 guinées ?

Soit x=le nombre de livres de chaque sorte ;
Alors $5x$=le prix du thé noir en chelins,
Et $7x$= " " vert " "

Mais le prix du noir et celui du vert=4 guinées=84s.

$$\text{Donc } 5x+7x=84$$
$$12x=84$$
$$\text{Donc } x=7 \text{ livres de chaque sorte.}$$

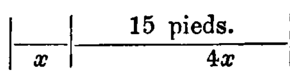
Prob. 4. L'aire d'une classe rectangulaire est de 180 verges et sa largeur est de 9 verges. Quelle est sa longueur ?

Soit x la longueur en verges ; et puisque l'aire égale la longueur × par la largeur ; nous avons

$$x \times 9 = \text{l'aire de la classe,}$$
$$\text{Donc } 9x=180$$
$$\text{Et donc } x=20 \text{ verges de longueur}=R.$$

Prob. 5. Divisez une baguette de 15 pieds de longueur en deux parties ; de manière que l'une soit 4 fois la longueur de l'autre ?

Soit x=la petite partie,
alors $4x$=sera la plus longue



Maintenant ces deux parties font ensemble 15 pieds.

$$\text{Donc } x+4x=15 \text{ pieds,}$$
$$5x=15 \text{ pieds,}$$
$$\text{Donc } x=3 \text{ pieds la petite partie,}$$

et la grande égale 4 fois $3=12$ pieds.

Prob. 6. On a acheté un cheval et sa selle, pour £40 mais le cheval coûte 9 fois autant que la selle. Quel est le prix de chaque ? *Rép.* £36 et £4.

Prob. 7. Divisez deux douzaines de marbres entre Richard et André, de manière que Richard en ait trois fois autant qu'André ? *Rép.* Richard=18.
André=06.

Prob. 8. On demande à un enfant, combien il a de marbres. Si j'en avais deux fois plus que j'en ai, j'en aurais 36. Combien en a-t-il? *Rép.* 12.

PROB. 9. Un libraire vend 10 livres à un certain prix et ensuite 15 au même prix. Dans cette dernière vente il reçoit 35 chelins de plus que la première fois. Quel est le prix de chaque livre? *Rép.* 7s.

Soit x = le prix d'un livre en chelins,
Alors $10x$ = le prix du premier lot,
Et $15x$ = le prix du second lot.

Maintenant si le prix du premier lot est ôté du prix du second, cette différence égale 35 chelins.

Donc $15x - 10x = 35$ chelins.
Soustrayant $10x$ de $15x$, nous avons
$$5x = 35s.$$
Donc $x = 7s.$ prix d'un livre.

PROB. 10. Divisez £300 entre A. B. et C. de manière que A. ait 2 fois autant que B. et C. autant que A. et B. ensemble.

Soit x = la part de B. en £
$2x$ = la part de A. en £
Et $x + 2x$ ou $3x$ = la part de C. en £
Mais entr'eux ils reçoivent £300.
Donc $x + 2x + 3x = £300.$
$6x = £300.$
Donc $x = £50$ la part de B.
Donc A. = £100 et C. = £150. *Preuve.*

PROB. 11. Si à 9 fois un nombre, on ajoute 3 fois le même nombre et qu'on en ôte 4 fois ce nombre, le reste = 48. Quel est ce nombre?

Soit x = le nombre;
$9x$ = 9 fois le nombre;
$3x$ = 3 fois le nombre;
et $4x$ = 4 fois le nombre;
Donc $9x + 3x - 4x = 48,$
$8x = 48,$
Donc $x = 6.$ *Réponse.*

PROB. 12. Divisez la somme de £100 entre deux hommes, 3 femmes et 4 enfants, de manière que chaque homme ait 2 fois autant que chaque femme et chaque femme trois fois autant que chaque enfant. Dites la part de chacun ?

Soit $x =$ la part de chaque enfant,
$3x =$ la part de chaque femme,
Et chaque homme aura $3x \times 2 = 6x$,
Ainsi nous avons 4 enfants $= 4x$,
3 femmes $\times 3x = 9x$,
et 2 hommes $\times 6x = 12x$.
Mais la somme de toutes ces parts $=$ £100 ;
Donc $4x + 9x + 12x =$ £100,
$25x =$ £100,
Donc $x =$ £4, part de chaque enfant.
Donc chaque enfant $=$ £4 ; chaque femme $= 3 \times$ £4 $=$ £12, et chaque homme $= 6 \times$ £4 $=$ £24. *Rép.*

Prob. 13. Un monsieur rencontre 4 pauvres et leur donne 5 chelins entr'eux tous ; mais le second reçoit 2 fois autant que le premier, le troisième 3 fois et le quatrième 4 fois autant que le premier. Combien donne-t-il à chacun ? *Rép.* 6d.; 12d.; 18d. et 24d.

Prob. 14. Divisez une ligne de 12 pieds de longueur en trois parts, de manière que la moyenne soit le double de la première et la plus grande le triple ? *R.* 2, 4, 6.

Prob. 15. Divisez 40 en trois parties et de telle manière que la première soit 5 fois la seconde et la troisième égale à la différence qu'il y a entre la première et la seconde ? *Rép.* 20, 4, 16.

Prob. 16. Un épicier a trois caisses de thé de différentes qualités, à 3*s.*, à 5*s.*, à 7*s.*; il en mélange une égale quantité de chaque espèce pour la somme de £6. Combien en prend-il de chaque espèce ? *Rep. 8lbs.*

Prob. 17. Un billet de £700 doit être payé en souverains, demi souverains et en couronnes, et en égal nombre de chaque. Combien y en aura-t-il ? *Rép.* 400.

Prob. 18. Deux voyageurs partent, l'un de Londres et l'autre de Guildford qui sont à 27 milles de distance ; l'un fait 4 milles à l'heure et l'autre en fait 5. Dans combien d'heures se rencontreront-ils? *Rép.* 3 heures.

PROB. 19. Une personne achète un cheval, un carrosse et un harnais pour £120 ; le prix du cheval est deux fois celui du harnais, et celui du carrosse 2 fois le prix du cheval et du harnais ensemble ; quel est le prix de chaque ?

Rép. Prix du harnais =£13 6 8.
" " cheval =£26 13 4.
" " carrosse =£80 0 0.

SOUSTRACTION.

30. La soustraction consiste à trouver la différence entre deux quantités algébriques et à lier ces quantités ensemble par les signes propres à former une expression : ainsi, si on demandait de soustraire $5-2$ (c'est-à-dire 3) de 9, il est évident que le reste serait *plus grand* de 2, que s'il s'agissait simplement d'ôter 5 de 9. Pour la même raison, si on soustrayait $b-c$ de a, le reste serait plus grand que si on ôtait simplement b de a. Si on soustrait b de a le reste est $a-b$, et conséquemment si on soustrait $b-c$ de a, le reste sera $a-b+c$. Ainsi, règle générale dans la soustraction des quantités algébriques, on change le signe des quantités *à soustraire*, puis on place ces quantités à la suite les unes des autres comme dans l'addition.

Ex. 1. De $5a+3x-2b$ ôtez $2c-4y$. La quantité à soustraire *doit changer de signes* et sera $-2c+4y$; et le reste sera $5a+3x-2b-2c+4y$.

Ex. 2. De $7x^2-2x+5$ ôtez $3x^2+5x-1$;
Le reste est $7x^2-2x+5-3x^2-5x+1$;
ou $7x^2-3x^2-2x-5x+5+1=4x^2-7x+6$.

Qu'est-ce que la soustraction ? Quelles sont les règles de la soustraction algébrique ? Expliquez les principes des bases de la soustraction ?

Mais quand les quantités *semblables* doivent être soustraites les unes des autres, comme dans le 2me exemple, il vaut mieux suivre la marche suivante. Changez les signes des quantités à soustraire, disposez-les comme pour l'addition et suivez le même procédé, ou bien conservez les mêmes signes, mais prenez les en sens contraire comme dans les exemples suivants.

	Ex. 3.	Ex. 4.	Ex. 5.
De	$7x^2-2x+5$	$12a^2-3a+b-1$	$5y^2-4y+3a$
Otez	$3x^2+5x-1$	$6a^2+a-2b+3$	$6y^2-4y-a$
	$4x^2-7x+6$	$6a^2-4a+3b-4$	$-y^2 \quad * \quad +4a$

	Ex. 6.	Ex. 7.	Ex. 8.
De	$7xy+2x-3y$	$14x+y-z-5$	$13x^3-2x^2+7$
Otez	$3xy-x+y$	$x+y+z-11$	$-x^3+x^2-6$

SUR LA SOLUTION DES ÉQUATIONS SIMPLES CONTENANT UNE SEULE QUANTITÉ INCONNUE.

2me RÈGLE.

31. " Une quantité peut être transférée d'un côté de l'équation à l'autre en changeant son signe ;" ceci est fondé sur l'axiôme que, " Si une quantité égale est *ajoutée* à une quantité égale ou si elle en est *soustraite*, les *sommes* ou les *restes* seront égaux.

Ex. 1. Soit $x+8=15$; ôtez 8 de chaque côté de l'équation, et elle devient $x+8-8=15-8$; mais $8-8=0$, donc $x=15-8=7$. *Rép.*

Ex. 2. Soit $x-7=20$; *ajoutez* 7 à chaque côté de l'équation, alors $x-7+7=20+7$; mais $-7+7=0$; donc $x=20+7=27$. *Rép.*

Ex. 3. Soit $3x-5=2x+9$; *ajoutez* 5 à chaque côté de l'équation, et elle devient $3x-5+5=2x+9+5$, où $3x=2x+9+5$. *Soustrayez* $2x$ de chaque côté de cette dernière équation, alors $3x-2x=2x-2x+9+5$; mais

$2x-2x=0$, donc $3x-2x=9+5$. Maintenant $3x-2x=x$, et $9+5=14$; ainsi $x=14$.

En examinant la marche de ces exemples on voit :

(1.) Que $x+8=15$ est identique avec $x=15-8$.
(2.) Que $x-7=20$ " avec $x=20+7$.
(3.) Que $3x-5=2x+9$ " avec $3x-2x=9+5$.

Ou, que " l'égalité des quantités de chaque côté de l'équation n'est point affectée en changeant une quantité d'un côté pour la porter de l'autre, pourvu qu'on *change son signe en même temps.*"

De cette règle on tire aussi cette conséquence, " Si la même quantité avec les mêmes signes sont trouves de *chaque* côté de l'équation, on peut le mettre de côté de l'équation ; ainsi, si $x+a=c+a$, alors $x=c+a-a$; mais $a-a=0$, donc $x=c$.

On voit de plus que les signes de tous les termes d'une équation peuvent être changés de + en — ou de — en +, sans altérer la valeur de l'inconnue. Car soit $x-b=c-a$; alors par la règle ci-dessus $x=c-a+b$; changez les signes de *tous* les termes, alors $b-x=a-c$. Dans ce cas $b-a+c=x$, ou $x=c-a+b$, comme ci-devant.

Ex. 4. $2x+3=x+17$. *Rép.* $x=14$.
Ex. 5. $5x-4=4x+25$. *Rép.* $x=29$.
Ex. 6. $7x-9=6x-3$. *Rép.* $x=6$.
Ex. 7. $4x+2a=3x+9b$. *Rép.* $x=9b-2a$.
Ex. 8. $15x+4=34$. *Rép.* $x=2$.
Ex. 9. $8x+7=6x+27$. *Rép.* $x=10$.
Ex. 10. $9x-3=4x+22$. *Rép.* $x=5$.
Ex. 11. $17x-4x+9=3x+39$. *Rép.* $x=3$.
Ex. 12. $ax-c=b+2c$. *Rép.* $x=\frac{b+3c}{a}$.
Ex. 13. $5x-(4x-6)=12$.

Le signe — devant un crochet étant le signe de toute la quantité incluse, indique que toute la quantité doit être *soustraite ;* donc, selon la règle, quand les crochets doivent être ôtés, il faut changer les signes à tous les termes. Ainsi le signe de $4x$ et de 6 sont respectivement $+$ et $-$; mais quand les crochets doivent être ôtés, il faut changer $+$ en $-$ et $-$ en $+$ respectivement.

L'équation devient alors $5x-4x+6=12$.
Et par transposition $5x-4x=12-6$;
Donc $x=6$.

Ex. 14. $6x-(8+x)=4x-(x-10)$.

En supprimant les crochets et changeant les signes des quantités qu'ils renferment, l'équation devient

$$6x-8-x=4=4x-x+10.$$

Transposant, on a $6x-x-4x+x=10+8$;
Donc $2x=18$.

Divisant les deux côtés de l'équation par 2,

$$x=9.$$

Ex. 15. $4x-(3x+4)=8$. *Rép.* $x=12$.

Ex. 16. $8x-(6x-8)=9-(3-x)$. *Rép.* $x=-2$.

Ex. 17. $4x-(3x-6)-(4x-12)=12-(5x-10)$. *R.* $x=2$.

Ex. 18. $5x-(3+3x)=8-(-x-1)$. *Rép.* $x=12$.

PROBLÈMES.

Prob. 20. On a deux nombres dont la différence est 15 et leur somme 59. Quels sont ces nombres ?

Comme leur *différence* est 15, il est évident que le plus grand nombre doit excéder le plus petit de 15.

Soit donc x=le petit nombre ;
Alors $x+15$=le plus grand :
Mais leur somme est$=59$;
Donc $x+x+15=59$,
Ou $2x+15=59$,
Et transposant 15, $2x=59-15$,
Ou $2x=44$;
Donc $x=22$ le petit nombre,
Et $x+15=22+15=37$ le plus grand nombre.

Prob. 21. Je donne à Richard et à Jacques 27 marbres, mais j'en donne 5 de plus à Richard qu'à Jacques. Combien en donné-je à chaque ?

Soit x=le nombre que je donne à Jacques;
Alors $x+5$=le nombre que je donne à Richard :
Mais ils en reçoivent ensemble 27 ;
Donc $x+x+5=27$,
Ou $2x+5=27$.
Par transposition $2x=27-5$,
Ou $2x=22$,
Donc $x=11$, le nombre que Jacques reçoit.
Et $x+5=16$, le nombre que Richard reçoit.

PROB. 22. Quatre fois un nombre est égal au double de ce même nombre augmenté de 12. Quel est ce nombre ?

Soit x=le nombre ;
Alors $4x$=4 fois ce nombre,
$2x$=le double,
Et $2x+12$=le double du nombre augmenté de 12.
Donc, par la condition de la question,
$$4x=2x+12.$$
Par transposition $4x-2x=12$.
$$2x=12\,;$$
Donc $x=6$.

PROB. 23. 420 personnes votent à une élection et un des deux candidats a une majorité de 46. Combien ont-ils de votes chacun ? *Rép.* 187 et 233.

PROB. 24. On a deux bâtons, l'un a 8 pieds plus que l'autre et le plus long contient trois fois le plus petit. Quelles sont leurs longueurs ? *Rép.* 4 *pieds* 12 *pieds*.

PROB. 25. Cinq fois un nombre diminué de 16 est égal à trois fois ce même nombre. Quel est ce nombre ? *Rép.* 8.

PROB. 26. Un cheval, une vache, et une brebis coûtent £24 ; la vache coûte £4 plus que la brebis, et le cheval £10 plus que la vache. Quel est le prix de la brebis ?

Soit x=le prix de la brebis en louis ;
Alors $x+4=$ " " vache "
Et $x+4+10=$ " du cheval "
Mais ces trois prix ensemble=£24 ;
Donc $x+(x+4)+(x+4+10)=24$.
Additionnant ensemble les termes semblables,
$3x+18=24$.
Par transposition $3x=24-18$,
$3x=6$;
Donc x=£2, prix de la brebis.

PROB. 27. Un drapier a trois pièces de drap qui ont ensemble 159 verges ; la seconde pièce a 15 verges de plus que la première et la troisième a 24 verges de plus que la seconde. Quelle est la longueur de chaque pièce ?
Rép. 35, 50 et 74 verges.

PROB. 28. Divisez £36 entre trois personnes, A. B. et C. de telle manière que B. ait £4 plus que A. et C. £7 plus que B. *Rép.* £7, £11, et £18.

PROB. 29. Un monsieur achète 4 chevaux, il donne pour le second £12 plus que pour le premier ; pour le troisième £5 plus que pour le second ; et pour le quatrième £2 plus que pour le troisième. La somme qu'il donne étant de £240. Trouvez le prix de chaque cheval ? *Rép.* £48, £60, £65, et £67.

PROB. 30. Quel est le nombre dont le double est autant au-dessus de 21 qu'il est lui-même au-dessous ?
Soit x=le nombre ;
Alors $2x$=sera le double,
$2x-21$=ce que le double est au-dessus de 21,
Et $21-x$=ce que le nombre est au-dessous de 21 :
Mais, par la question, ces deux valeurs sont égales l'une à l'autre ; Donc $2x-21=21-x$.
Et par transposition, $2x+x=21+21$,
$3x=42$;
Donc $x=14$.

On peut aisément prouver que la réponse est correcte, car $2x-21=28-21=7$, et $21-x=21-14=7$; ce qui montre que deux fois 14 est autant au-dessus de 21, que 21 est au-dessus de 14, c'est-à-dire 7.

Prob. 31. En divisant un panier d'oranges parmi un certain nombre d'enfants, je trouve qu'en donnant 4 à chacun, j'en ai 6 de reste, et en donnant 3 à chacun, j'en ai 12 de reste. Combien y avait-il d'enfants ?

Soit x=le nombre d'enfants ;

alors, si j'en donne à chacun 4 je donnerai 4 fois x oranges. Donc $4x$=le nombre d'oranges distribuées en premier lieu ; mais le nombre d'oranges est de 6 en plus que ce nombre ;

Donc le *nombre* d'oranges est $4x+6$:

Si au contraire chaque enfant ne reçoit que 3 oranges, il en aura 12 de reste ;

Donc le *nombre total* d'oranges$=3x+12$.

Ces deux valeurs pour le *nombre d'oranges* exprimées en termes de x doivent nécessairement être égales ; Axiôme (1.)

Donc $4x+6=3x+12$.

Par transposition $4x-3x=12-6$;

Donc $x=6$, nombre d'enfants.

Prob. 32. Un courrier fait 240 milles en 4 jours, mais en conséquence des mauvais chemins il fait 5 milles le second jour, 9 le troisième et 14 le quatrième de moins que le premier. Combien de milles a-t-il fait chaque jour ? Soit x=le premier jour, en milles ;

Alors $x-5$=le second " " "

$x-9$=le troisième " "

Et $x-14$=le quatrième " "

Maintenant le nombre de milles qu'il fait en 4 jours $=240$. Donc $x+x-5+x-9+x-14=240$.

Additionnant les quantités, $4x-28=240$.

Par transposition $4x=240+28$,

$4x=268$;

Donc $x=67$ milles, pour le premier jour,

$x-5=62$ " " le second jour,

$x-9=58$ " " le troisième jour,

Et $x-14=53$ " " le quatrième jour.

PROB. 33. On demande de diviser le nombre 99 en 5 parties, de manière que la première excède la seconde de 3 et soit moindre que la troisième de 10, plus grande que la quatrième de 9 et moindre que la cinquième de 16? *Rép.* les parts sont 17, 14, 27, 8, 33.

PROB. 34. Deux marchands entrent dans une spéculation dans laquelle A. gagne £54 plus que B. Le gain total est de £49 moins que trois fois le gain de B. Quel est le gain de chacun?
Rép. gain de A. £157 ; de B. £103.

PROB. 35. En divisant un lot de pommes à un certain nombre d'enfants, si j'en donne 6 à chacun il m'en manque 8, mais si j'en donne 4, j'en ai 12 de reste. Combien y a-t-il d'enfants? *Rép.* 10 enfants.

MULTIPLICATION.

32. La MULTIPLICATION consiste à trouver le produit de deux quantités algébriques ou plus ; dans la marche à suivre, il faut observer les quatre règles suivantes.

(1.) Lorsque les quantités à multiplier ont des signes *semblables*, le signe du *produit* sera $+$; et si leurs signes sont *dissemblables*, le signe du produit sera $-$.*

---

* Cette règle pour la multiplication des signes peut être expliquée de la manière suivante :—

I. S'il s'agit de multiplier $+a$ par $+b$, cela revient à dire qu'il faut prendre $+a$ autant de fois qu'il y a d'unités en b, et conséquemment le produit sera $+ab$.

II. S'il s'agit de multiplier $-a$ par $+b$, cela veut dire qu'il faut prendre $-a$ autant de fois qu'il y a d'unités en b et ainsi le produit est $-ab$.

III. Si $+a$ doit être multiplié par $-b$, on entend qu'il faut *soustraire* $+a$ autant de fois qu'il y a d'unités en b, et conséquemment le produit est $-ab$.

IV. Enfin, s'il faut multiplier $-a$ par $-b$, cela indique qu'il faut *soustraire* $-a$ autant de fois qu'il y a d'unités en b ; et puisque *soustraire une quantité négative* revient au même que d'en *ajouter une positive*, le produit sera $+ab$.

(2.) Il faut multiplier ensemble les coefficients des facteurs, pour former le coefficient du produit.

(3.) Il faut écrire les lettres dont ils sont composés, à la suite l'une de l'autre, *par ordre alphabétique.*

(4.) Si la *même* lettre se trouve dans les deux facteurs, il faut en additionner les exposants, pour former l'exposant du *produit.*

Ainsi, $+a$ multiplié par $+b$ est égal à $+ab$, et $-a$ multiplié par $-b$ est aussi égal à $+ab$; $+3x \times -5y = -15xy$; $-3ab \times +4cd = -12abcd$; $-4a^2b^2 \times -3abd^2 = +12a^3b^3d^2$; etc., etc.

De la division des quantités algébriques en *simples* et *composées*, il se présente trois cas dans la multiplication. En opérant, voici la règle qu'il faut observer: "Multiplier *d'abord* les signes, *ensuite* les coefficients, et *enfin* les lettres."

Ier Cas.

33. Lorsque les *deux* facteurs sont des quantités *simples*, pour lequel on a déjà donné la règle.

Ex. 1.	Ex. 2.	Ex. 3.	Ex. 4.
$4ab$	$2axy$	$-5abc$	$-5a^2bc$
$3a$	$-3y$	$3a^2b$	$-2b^2x^2$
$12a^2b$	$-6axy^2$	$-15a^3b^2c$	$+10a^2b^3cx^2$

Ou bien, ces quatre règles peuvent être exprimées en *une* seule; ainsi,

Multiplier $a-b$ par $c-d$, c'est additionner $a-b$ à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités en $c-d$; or, c'est ce qui s'effectue en l'additionnant c *fois*, et le soustrayant d *fois;*

Mais $a-b$, *additionné* c *fois* . . . $=ac-bc$,
Et $a-b$, *soustrait* d *fois* . . . . $=-ad+bd$,
Donc $\overline{a-b} \times \overline{c-d}$ . . . . $=ac-bc-ad+bd$.

C'est-à-dire
$$+a \times +c = +ac$$
$$-b \times +c = -bc$$
$$+a \times -d = -ad$$
$$-b \times -d = +bd$$

Qu'est-ce que la multiplication, et quelles sont les règles qu'il faut observer en multipliant?

Ex. 5.	Ex. 6.	Ex. 7.	Ex. 8.
$4abc$	$9x^2y^2$	$-4cdx$	$-7ax^2y$
$3ac$	$-2y$	$2c$	$-2ac^2x$

II. Cas.

34. Quand un des facteurs est *composé* et l'autre *simple*, " Alors il faut multiplier *chaque terme* du facteur composé par le facteur simple, comme dans le Cas ci-devant, et le résultat sera le produit demandé."

	Ex. 1.	Ex. 2.
Multipliez	$3ab-2ac+d$	$3x^3-2x^2+4$
par	$4a$	$-14ax$
Produit	$12a^2b-8a^2c+4ad$	$-42ax^4+28ax^3-56ax$

	Ex. 3.	Ex. 4.
Multipliez	$7x^2-2x+4a$	$12a^3-2a^2+4a-1$
par	$-3a$	$3x$
Produit	$-21ax^2+6ax-12a^2$	

	Ex. 5.	Ex. 6.
Multipliez	$9a^2x+3a-x+1$	$4x^2y+3x-2y$
par	$-x^2$	$-3xy$
Produit		

III. Cas.

35. Quand les deux facteurs sont des quantités *composées*, il faut multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur; en ayant soin de placer les quantités semblables l'une sous l'autre, la somme de tous les termes sera le produit demandé.

	Ex. 1.	Ex. 2.	Ex. 3.
Multipliez	$a+b$	$a+b$	a^2+ab+b^2
par	$a+b$	$a-b$	$a-b$
1° par a	a^2+ab	a^2+ab	$a^3+a^2b+ab^2$
2° par b	$ab+b^2$	$-ab-b^2$	$-a^2b-ab^2-b^3$
Produit	$a^2+2ab+b^2$	$a^2 \quad * \quad -b^2$	$a^3 \quad * \quad * \quad -b^3$

Ex. 4.

$$\begin{array}{r}
3x^2+2x \\
4x+7 \\
\hline
12x^3+8x^2 \\
+21x^2+14x \\
\hline
12x^3+29x^2+14x \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ex. 5.

$$\begin{array}{r}
3x^2-2x+5 \\
6x-7 \\
\hline
18x^3-12x^2+30x \\
-21x^2+14x-35 \\
\hline
18x^3-33x^2+44x-35 \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ex. 6.

$$\begin{array}{l}
14ac-3ab+2 \\
ac-ab+1 \\
\hline
14a^2c^2-3a^2bc+2ac \\
\qquad -14a^2bc \qquad +3a^2b^2-2ab \\
\qquad\qquad +14ac \qquad -3ab+2 \\
\hline
14a^2c^2-17a^2bc+16ac+3a^2b^2-5ab+2 \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ex. 7.

$$\begin{array}{l}
x^2-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3} \\
\frac{1}{3}x+2 \\
\hline
\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{9}x \\
\qquad +2x^2-x+\frac{4}{3} \\
\hline
\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{6}x^2-\frac{7}{9}x+\frac{4}{3} \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ex. 8. Multipliez $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ par $a+b$.
Rép. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Ex. 9. " $4x^2y+3xy-1$ par $2x^2-x$.
Rép. $8x^4y+2x^3y-2x^2-3x^2y+x$.

Ex. 10. " x^3-x^2+x-5 par $2x^2+x+1$.
Rép. $2x^5-x^4+2x^3-10x^2-4x-5$.

Ex. 11. " $3a^2+2ab-b^2$ par $3a^2-2ab+b^2$.
Rép. $9a^4-4a^2b^2+ab^3-b^4$.

Ex. 12. " $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ par $x-y$.
Rép. x^4-y^4.

Ex. 13. " $x^2-\frac{3}{4}x+1$ par $x^2-\frac{1}{2}x$.
Rép. $x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x$.

DE LA SOLUTION DES ÉQUATIONS SIMPLES A UNE SEULE INCONNUE.

Ex. 1 $3x+4(x+2)=36$.

Par l'expression $4(x+2)$, on entend que $x+2$ doit tre multiplié par 4, et le produit par le 2me Cas est $x+8$;

$$\text{Donc } 3x+4x+8=36.$$

En additionnant ensemble les termes contenant x, et ransposant 8,
$$7x=36-8,$$
$$7x=28,$$
$$\text{Donc } x=4.$$

Ex. 2. $8(x+5)+4(x+1)=80$.

Effectuant la multiplication,
$$8x+40+4x+4=80.$$
dditionnant les termes $12x+44=80$.
$$\text{Transposant, } 12x=80-44,$$
$$12x=36;$$
$$\text{Donc } x=3.$$

Ex. 3.	$6(x+3)+4x=58$.	*Rép.* $x=4$.
Ex. 4.	$30(x-3)+6=6(x+2)$.	*Rép.* $x=4$.
Ex. 5.	$5(x+4)-3(x-5)=49$.	*Rép.* $x=7$.
Ex. 6.	$4(3+2x)-2(6-2x)=60$.	*Rép.* $x=5$.
Ex. 7.	$3(x-2)+4=4(3-x)$.	*Rép.* $x=2$.
Ex. 8.	$6(4-x)-4(6-2x)-12=0$.	*Rép.* $x=6$.

PROBLÈMES.

PROB. 36. Quels sont les deux nombres dont la différence est 9, et si on ajoute 3 fois le plus grand à 5 fois le plus petit, la somme sera 35?

Soit $x=$le petit nombre;
Alors $x+9=$sera le grand.
Et 3 *fois* le grand$=3(x+9)=3x+27$,
5 *fois* le petit $=5x$.

Mais par la donnée, 3 fois le grand$+5$ fois le petit$=$ 5;

Donc $3x+27+5x=35$,
$8x+27=35$.
Transposant, $8x=35-27=8$;
Donc $x=1$, le petit nombre,
Et $x+9=10$, le grand.

PROB. 37. Si un courrier qui fait 7 milles à l'heure, a 5 heures d'avance sur un second ; combien faudra-t-il de temps à ce dernier pour le rejoindre en faisant 12 milles à l'heure ?

Soit x=le nombre d'heures que marche le second,
Alors $x+5$= " " " premier.
Donc $12x$=le nombre de milles que marche le second,
Et $7(x+5)$= " " " premier.

Mais, par la donnée, les courriers marchent le même nombre de milles ;

Donc $12x=7(x+5)$,
$12x=7x+35$.
Transposant, $12x-7x=35$.
$5x=35$,
$x=7$, le nombre d'heures que met le second courrier à rejoindre le premier.

PROB. 38. Sur un chemin de fer 15 passagers ont payé £3 12*s.* ; le prix des premières places étant de 6*s.* et celui des secondes de 4*s.* Combien y en avait-il de chaque place ?

Soit x=le nombre des passagers des 1ères places.
Alors $15-x$=le nombre des passagers des 2ndes "
Donc $6x$=les chelins payés par " " 1ères "
Et $4(15-x)$=les chelins payés par " " 2ndes "

Mais ces deux sommes se montent à £3 12*s.* ou 72*s.*

Donc $6x+4(15-x)=72$,
$6x+60-4x=72$.
Transposant $6x-4x=72-60$,
$2x=12$;
Donc $x=6$ n°. de passagers de 1er places.
Donc le nombre de passagers de 2de places$=15-x=9$.

PROB. 39. Quel est le nombre auquel, si on ajoute 6, deux fois la somme sera 24? *Rép.* 6.

PROB. 40. Il y a deux nombres dont la différence est 6, et si on ajoute 12 à 4 fois leur somme, le tout égalera 60. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 3 et 9.

PROB. 41. On a mélangé du thé à 6*s*. la livre avec d'autre à 4*s*. la livre, et 16 livres du mélange ont été vendues £3 18*s*. Combien y avait-il de livres de chaque sorte? *Rép.* 7*lbs.* et 9*lbs.*

PROB. 42. La vitesse d'un train de chemin de fer est de 24 milles à l'heure, et 3 heures après on en fait partir un second qui fait 32 milles à l'heure. Dans combien d'heures le second aura-t-il rejoint le premier? *Rép.* 9 heures.

PROB. 43. Un mercier ayant coupé 19 verges de chacune de trois pièces de soie, et 17 d'une autre de même longueur, trouva que les restes ensemble, mesurèrent 142 verges. Quelle était la longueur de chaque pièce?

Soit x=la longueur de chaque pièce en verges;
Donc $x-19$=la longueur de chacun des 3 restes,
Et $x-17$=la longueur de l'autre reste;

Alors $3(x-19)+x-17=142$,
Ou $3x-57+x-17=142$,
$4x-74=142$.
Transposant, $4x=142+74$,
$4x=216$;
Donc $x=54$.

PROB. 44. Divisez 68 en deux parties telles que la différence entre la plus grande et 84 soit égale à 3 fois la différence entre la plus petite et 40.

Soit x=la plus petite partie,
Alors $68-x$=la plus grande;
Donc $84-(68-x)$=différence entre 84 et la plus grande,
Et $3\,.\,(40-x)$=3 fois la différence entre la plus petite et 40.

Mais, par la question, ces différences sont égales l'une à l'autre ;

$$\therefore 84-(68-x)=3 \,.\, (40-x),$$
$$\text{ou } 84-68+x=120-3x.$$
$$\text{Transposant, } x+3x=120+68-84,$$
$$4x=104\,;$$
$$\therefore x=26, \text{ la plus petite partie ;}$$
$$\text{et } \therefore \text{ la plus grande}=42.$$

PROB. 45. Un homme à une partie de cartes, a parié 3 chelins contre deux sur chaque donne. Après vingt mains il gagna 5 chelins. Combien avait il gagné de donnes ?

Soit x=le nombre de donnes qu'il a gagné ;
$\therefore 20-x$=le nombre qu'il a perdu ;
$\therefore 2x$=l'argent qu'il a gagné ;
et $3.\,(20-x)$=l'argent qu'il a perdu.

Mais la différence entre l'argent gagné et l'argent perdu était $5s$.

$$\therefore 2x-3\,.\,(20-x)=5,$$
$$2x-60+3x=5,$$
$$5x-60=5,$$
$$5x=65\,;$$
$$\therefore x=13.$$

PROB. 46. A et B jouant aux cartes, tirent de telle sorte qu'il prennent plus qu'ils ne laissent. Or, il se trouve que A tire deux fois autant que B laisse, et B tire sept fois autant que A. laisse. Combien ont-ils tiré chacun ?

Supposons que A tire $2x$ cartes ;
alors $52-2x$=le nombre qu'il laisse,
et x=le nombre que B laisse ;
$\therefore 52-x$=le nombre qu'il tire.

Mais le nombre que tire B. est égal à 7 fois le nombre que A laisse ;

$$\therefore 52-x=7\,.\,(52-2x)$$
$$52-x=364-14x.$$

Transposant, $14x-x=364-52$,

$$13x=312;$$

$$\therefore x=24;$$

$\therefore$ A tire 48, et B tire 28 cartes.

PROB. 47. Quelques personnes s'accordent à donner 6*d.* chacune à un batelier pour les mener de Londres à Greenwich, mais à cette condition, que pour chaque personne en sus prise en route, il rabattrait 3*d.* sur leurs dépenses communes ; or, le batelier en prit à bord 3 de plus que la quatrième partie du nombre de passagers primitifs, en considération desquels il ne leur fit payer que 5*d.* chacune. Combien y avait-il de passagers en partant ?

Représentons le nombre qu'il y avait en partant par $4x$; alors 3 de plus que la quatrième partie de ce nombre$=x+3$, et ils payèrent $3\ (x+3)$ deniers.

$\therefore$les passagers primitifs payèrent $6\times 4x-3(x+3)$deniers. Mais les passagers primitifs payèrent $5\times 4x$ deniers ;

$\therefore$ en égalisant ces deux valeurs, nous avons

$$6\times 4x-3\ (x+3)=5\times 4x,$$

$$24x-3x-9=20x.$$

Transposant, $24x-3x-20x=9$;

$$\therefore x=9;$$

et $\therefore$ le nombre des passagers était$=4\times 9=36$.

PROB. 48. Il y a deux nombres dont la différence est 14, et si on soustrait 9 fois le plus petit de 6 fois le plus grand, il restera 33. Quels sont ces deux nombres ?

Rép. 17 et 31.

PROB. 49. Deux personnes A et B entrent dans le commerce avec des sommes égales ; A *gagne* £120, et B *perd* £80 après quoi ils se retirent ; mais l'argent de A est *trois fois* celui de B. Qu'avaient-ils chacun en commençant ? *Rép.* £180.

PROB. 50. Un rectangle a 8 pieds de longueur, et si on ajoutait 2 pieds à sa largeur, sa superficie serait de 48 pieds. Trouvez sa largeur ? *Rép.* 4 pieds.

Prob. 51. Guillaume a 4 fois autant de marbres que Thomas, mais si l'on en donnait 12 à chaque, Guillaume n'aurait plus que deux fois autant que Thomas. Combien en ont-ils chacun? *Rép.* 24 et 6.

Prob. 52. Deux ardoises de forme rectangulaire ont 8 pouces de large, mais la longueur de l'une surpasse celle de l'autre de 4 pouces. Déterminez leur longueur, sachant que la plus longue a deux fois la superficie de l'autre.

Soit x=la moins longue en pouces;
alors $x+4$=la plus " "

Or la superficie d'un rectangle est égale à sa longueur multipliée par sa largeur;

$\therefore 8x$ et $8(x+4)$ sont les superficies des ardoises.

Mais la plus grande a deux fois la superficie de la plus petite;

$$\therefore 8x \times 2 = 8(x+4),$$
$$16x = 8x + 32;$$
$$\therefore 8x = 32;$$
$\therefore x = 4$, la longueur de la plus petite,
et $x+4 = 8$, la " " grande.

Prob. 53. On a deux planches de superficie égale; la largeur de l'une est 18 pouces, et celle de l'autre 16 pouces, et la différence de leurs longueurs est 4 pouces. Déterminez la longueur de chaque et la superficie commune? *Rép.* 32, 36, et 576.

Prob. 54. Un levier droit (sans poids) soutient en équilibre sur un pivot, 24 *lbs.* au bout de son bras le plus court, et 8 *lbs.* au bout de son bras le plus long, mais le bras le plus long a 6 pouces de plus que l'autre. Déterminez les longueurs des bras.

Soit x=la longueur en pouces, du plus court;
alors $x+6$= " " " long.

Or le levier sera en équilibre, quand le proids d'un bout multiplié par la longueur du bras correspondant est égale au poids à l'autre bout, multiplié par son bras correspondant;

$\therefore 24x=8\ (x+6),$
$24x=8x+48,$
$16x=48;$
$\therefore x=3$ pouces, la longueur du bras le plus court;
et $x+6=9$ " " " long.

Prob. 55. Un poids de 6 *lbs.* balance un poids de 24 *lbs.* sur un levier (supposé sans poids), dont la longueur est 20 pouces; si l'on ajoute 3 *lbs.* à chaque poids, que faudra-t-il ajouter à chaque bras du levier, de manière que le pivot puisse retenir sa position primitive et que l'équilibre soit toujours maintenu?

Ce problème se décompose en deux autres problèmes;

(1.) Trouver les longueurs des bras dans la position primitive:

Soit x=la longueur, en pouces, du plus court;
alors $20-x=$ " " " long.

Maintenant, pour qu'il puisse y avoir équilibre, $24x$ et $6\ (20-x)$ doivent s'égaler;

$\therefore 24x=120-6x,$
$30x=120;$
$\therefore x=\ 4$, la longueur du plus court;
et $20-x=\ 16,$ " " " long.

(2.) Trouver l'*addition* qui doit être faite à chaque bras, pour qu'il puisse y avoir encore équilibre sur le pivot dans sa position primitive après avoir ajouté 3*lbs.* à chaque poids:

Soit x=le nombre de pouces qu'il faudrait ajouter à chaque bras; alors les bras deviennent $4+x$ et $16+x$ pouces respectivement: et les poids sont devenus 27*lbs.* et 9*lbs.* respectivement.

Mais par le principe de l'équilibre du levier, $27\ (4+x)$ et $9\ (16+x)$ doivent s'égaler;

$\therefore 27\ (4+x)=9\ (16+x).$

Divisez chaque membre de l'équation par 9, et

$3\ (4+x)=16+x,$
$12+3x=16+x,$
$3x-x=16-12$
$2x=\ 4;$
$\therefore x=\ 2.$

Prob. 56. La condition étant la même que dans le dernier problème, combien faudra-t-il ajouter de pouces au bras le plus court pour que le levier puisse, dans sa position primitive, maintenir son équilibre?

Rép. $1\frac{1}{3}$ pouce.

Prob. 57. Une garnison de 1000 hommes a été ravitaillée pour 30 jours ; après 10 jours il y eu du renfort, et alors les provisions ont été épuisées en 5 jours; déterminez le nombre d'hommes du renfort?

Rép. 3000.

Prob. 58. Deux triangles ont chacun une base de 20 pieds, mais la hauteur de l'un est 6 pieds de moins que celui de l'autre, et la superficie du plus grand triangle est deux fois celui du plus petit. Déterminez leur hauteur? *Rép.* 6 et 12.

N. B. La superficie d'un triangle $=\frac{1}{2}$ base × hauteur.

Prob. 59. A et B se mettent à jouer avec des sommes égales ; A a gagné 12*s.*; alors 6 fois l'argent de A était égale à 9 fois celui de B. Qu'avaient-ils chacun en commençant? *Rép.* £3.

Prob. 60. Une compagnie de voyageurs réglant leurs comptes à un hôtel, paient 4 chelins chaque, et ils observent que s'ils eussent été 5 de plus ils n'eussent payé que 3 chelins chaque. Combien y avait-il de voyageurs? *Rép.* 15.

Prob. 61. Deux personnes A et B, partent en même temps de deux villes éloignées de 40 milles, et se rencontrent après 5 heures, mais B a fait 2 milles à l'heure de plus que A. Combien de milles A a-t-il fait par heure?

Rép. 3 milles.

DIVISION.

36. La *Division* des quantités algébriques consiste à trouver leur quotient, et en effectuant l'opération il faut faire attention aux mêmes circonstances que dans leur multiplication, et conséquemment il faut observer les quatre règles suivantes.

(1.) Que si les signes du dividende et du diviseur sont *semblables*, le signe du quotient sera +; si les signes sont *dissemblables*, alors le signe du quotient sera —.*

(2.) Que le coefficient du *dividende* doit être divisé par le coefficient du *diviseur*, pour avoir le coefficient du quotient.

(3.) Que les lettres qui sont *communes* au dividende et au diviseur doivent être *rejetées* du quotient.

(4.) Que si la même lettre se trouve au dividende et au diviseur avec des exposants *différents*, alors il faut soustraire l'exposant de cette lettre au diviseur de son exposant au dividende, pour avoir son exposant au quotient. Ainsi,

(1.) $+abc$ divisé par $+ac$ - - ou $\dfrac{+abc}{+ac} = +b.$

(2.) $+6abc$ - - - - $-2a$ - - ou $\dfrac{+6abc}{-2a} = -3bc.$

(3.) $-10xyz$ - - - - $+5y$ - - ou $\dfrac{-10xyz}{+5y} = -2xz.$

(4.) $-20a^2x^2y^3$ - - $-4axy$ ou $\dfrac{-20a^2x^2y^3}{-4axy} = +5axy$

Il y a aussi trois Cas dans la *Division:* comme dans la *Multiplication.*

---

* La règle pour les signes se déduit directement de celle de la Multiplication : ainsi,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } +a\times +b = +ab, \text{ alors } \dfrac{+ab}{+a} = +b, \text{ et} \dfrac{+ab}{+b} = +a \\ +a\times -b = -ab, \ldots\ldots \dfrac{-ab}{+ab} = -b, \text{ et} \dfrac{-ab}{-b} = +a \\ -a\times -b = +ab, \ldots\ldots \dfrac{+ab}{-a} = -b, \text{ et} \dfrac{+ab}{-b} = -a \end{array}\right\}$$

C'est-à-dire les signes *semblables* donnent +, et les signes *dissemblables* donnent —.

Qu'entend-t-on par la division des quantités algébriques? Quelles sont les règles pour la division?

I^er^ CAS.

37. Quand le dividende et le diviseur sont tous deux des termes *simples*.

Ex. 1.

Divisez $18ax^2$ par $3ax$.

$$\frac{18ax^2}{3ax}=6x.$$

Ex. 2.

Divisez $15a^2b^2$ par $-5a$.

$$\frac{+15a^2b^2}{-5a}=-3ab^2.$$

Ex. 3.

Divisez $-28x^2y^3$ par $-4xy$.

$$\frac{-28x^2y^3}{-4xy}=+7xy^2.$$

Ex. 4.

Divisez $25a^3c^2$ par $-5a^2c$.

$$\frac{+25a^3c^2}{-5a^2c}=$$

Ex. 5.

Div. $-14a^3b^2c$ par $7ac$.

$$\frac{-14a^3b^2c}{+7ac}=$$

Ex. 6.

Div. $-20x^2y^2z^3$ par $-4yz$.

$$\frac{-20x^2y^2z^3}{-4yz.}=$$

II. CAS.

38. Quand le dividende est une quantité *composée*, et que le diviseur est une quantité *simple ;* il faut diviser chaque terme du dividende séparément, et les quantités résultantes seront le quotient demandé.

Ex. 1.

Divisez $42a^2+3ab+12a^2$ par $3a$.

$$\frac{42a^2+3ab+12a^2}{3a}=14a+b+4a.$$

Ex. 2.

Divisez $90a^2x^3-18ax^2+4a^2x-2ax$ par $2ax$.

$$\frac{90a^2x^3-18ax^2+4a^2x-2ax}{2ax}=45ax^2-9x+2a-1.$$

Ex. 3.

Divisez $4x^3-2x^2+2x$ par $2x$.

$$\frac{4x^3-2x^2+2x}{2x}=$$

Enoncez la règle pour le deuxième Cas ?

Ex. 4.

Divisez $-24a^2x^2y-3axy+6x^2y^2$ par $-3xy$.

$$\frac{-24a^2x^2y-3axy+6x^2y^2}{-3xy}=$$

Ex. 5.

Divisez $14ab^3+7a^2b^2-21a^2b^3+35a^3b$ par $7ab$.

$$\frac{14ab^3+7a^2b^2-21a^2b^3+35a^3b}{7ab}=$$

III. Cas.

39. Quand le dividende et le diviseur sont l'un e l'autre des quantités *composées*. Voici la Règle dan ce cas, " Coordonnez le dividende et le diviseur selor les puissances d'une même lettre, commençant par l plus *élevée* ; ensuite cherchez combien de fois le premie terme du diviseur est contenu dans le premier terme d dividende, et écrivez le résultat au quotient ; multiplie chaque terme du diviseur par cette quantité, et écrive le produit sous les termes correspondants (c'est-à-dir *semblables*) au dividende, faites en la soustraction ; et a reste abaissez autant de termes du dividende qu'il e faudra pour que les termes du dividende soient en égal nombre à ceux du diviseur ; continuez ainsi jusqu'à c que tous les termes du dividende soient abaissés, comm en arithmétique."

Ex. 1.

Divisez $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ par $a-b$.

$$\begin{array}{llll|l}
a^3 & -3a^2b & +3ab^2 & -b^3 & a-b \\
\cline{5-5}
a^3 & -\ a^2b & & & a^2-2ab+b^2 \\
\cline{1-2}
* & -2a^2b & +3ab^2 & & \\
 & -2a^2b & +2ab^2 & & \\
\cline{2-3}
 & * & ab^2 & -b^3 & \\
 & & ab^2 & -b^3 & \\
\cline{3-4}
 & & * & * & \\
\end{array}$$

Quelle est la règle lorsque le dividende et le diviseur sont des quantités *composées* ?

Dans l'exemple ci-dessus, le dividende est coordonné selon les puissances de a, qui est le premier terme du diviseur. Ceci fait : voici la marche à suivre :—

(1.) a est contenu dans a^3, a^2 fois ; ce qu'il faut écrire au quotient.

(2.) Multipliez $a-b$ par a^2, et l'on a a^3-a^2b.

(3.) Soustrayez a^3-a^2b de a^3-3a^2b, on a pour reste $-2a^2b$.

(4.) Abaissez le terme suivant $+3ab^2$.

(5.) a est contenu dans $-2a^2b$, $-2ab$ fois ; ce qu'il faut écrire au quotient.

(6.) *Multipliez* et *soustrayez* comme sus-dit et vous aurez pour reste ab^2.

(7.) Abaissez le dernier terme $-b^3$.

(8.) a est contenu dans ab^2, $+b^2$ fois ; écrivez le au quotient.

(9.) *Multipliez* et *soustrayez* comme ci-devant, il ne reste plus rien ; le quotient est donc $a^2-2ab+b^2$.

Ex. 2.

$$\begin{array}{l|l}
a^6+5a^4x+10a^3x^2+10a^2x^3+5ax^4+x^6 & a^2+2ax+x^2 \\
\underline{a^6+2a^4x+a^3x^2} & \overline{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3} \\
\quad * \quad 3a^4x+9a^3x^2+10a^2x^3 & \\
\quad \quad \underline{3a^4x+6a^3x^2+3a^2x^3} & \\
\qquad * \quad 3a^3x^2+7a^2x^3+5ax^4 & \\
\qquad \quad \underline{3a^2x^3+6a^2x^3+3ax^4} & \\
\qquad\quad * \quad a^2x^3+2ax^4+x^6 & \\
\qquad\quad \quad \underline{a^2x^3+2ax^4+x^6} & \\
\qquad\qquad * \quad * \quad * &
\end{array}$$

Ex. 3.

$$
\begin{array}{l|l}
12x^5-13x^4-34x^3+39x^2 & 4x^2-7x \\
\underline{12x^5-21x^4} & 3x^3+2x^2-5x+\dfrac{4x^2}{4x^3-7x}\ (^1) \\
\quad * + 8x^4-34x^3 & \\
\quad\;\; \underline{+ 8x^4-14x^3} & \\
\qquad\quad * -20x^3+39x^2 & \\
\qquad\qquad \underline{-20x^3+35x^2} & \\
\qquad\qquad\quad * \quad + 4x^2 &
\end{array}
$$

Ex. 4.

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4-96 & 3x-6 \\
\underline{6x^4-12x^3} & 2x^3+4x^2+8x+16 \\
\; * +12x^3-96 & \\
\quad \underline{+12x^3-24x^2} & \\
\qquad * \quad +24x^2-96 & \\
\qquad\qquad \underline{+24x^2-48x} & \\
\qquad\qquad\quad * \quad +48x-96 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+48x-96} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad * \quad * &
\end{array}
$$

Ex. 5.

$$
\begin{array}{l|l}
x^6-x^4+x^3-x^2+2x-1 & x^2+x-1 \\
\underline{x^6+x^5-x^4} & x^4-x^3+x^2-x+1 \\
* -x^5+x^3-x^2 & \\
\quad \underline{-x^5-x^4+x^3} & \\
\quad * +x^4-x^2+2x & \\
\qquad \underline{+x^4+x^3-\;x^2} & \\
\qquad * \quad -x^3+2x\;-1 & \\
\qquad\quad\;\; \underline{-x^3-\;x^2+x} & \\
\qquad\quad * \quad +\;x^2+x-1 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{+\;x^2+x-1} & \\
\qquad\qquad\qquad * \quad * \quad * &
\end{array}
$$

---

(1) S'il y a un reste faites-en le numérateur d'une fraction dont le dénominateur sera le *diviseur*; il faut écrire cette fraction au quotient (avec son propre signe), comme dans l'arithmétique ordinaire.

Ex. 6.

$$\begin{array}{llll|l}
x^4-\frac{5}{4}x^3 & +\frac{11}{8}x^2 & -\frac{1}{2}x & & x^2-\frac{1}{2}x \\
x^4-\frac{1}{2}x^3 & & & & x^2-\frac{3}{4}x+1 \\
\hline
* \ -\frac{3}{4}x^3 & +\frac{11}{8}x^2 & & & \\
\ \ \ -\frac{3}{4}x^3 & +\frac{3}{8}x^2 & & & \\
\hline
\ \ \ \ * & +\ x^2 & -\frac{1}{2}x & & \\
 & +\ x^2 & -\frac{1}{2}x & & \\
\hline
 & \ \ \ * & \ \ * & & \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ex. 7. Divisez $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ par $a+b$.
Rép. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Ex. 8. Divisez $a^5-5a^4x+10a^3x^2-10a^2x^3+5ax^4-x^5$ par $a^3-3a^2x+3ax^2-x^3$.
Rép. $a^2-2ax+x^2$.

Ex. 9. Divisez $25x^6-x^4-2x^3-8x^2$ par $5x^3-4x^2$.
Rép. $5x^3+4x^2+3x+2$.

Ex. 10. Divisez $a^4+8a^3x+24a^2x^2+32ax^3+16x^4$ par $a+2x$.
Rép. $a^3+6a^2x+12ax^2+8x^3$.

Ex. 11. Divisez a^5-x^5 par $a-x$.
Rép. $a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4$.

Ex. 12. Divisez $6x^4+9x^2-20x$ par $3x^2-3x$.
Rép. $2x^2+2x+5-\dfrac{5x}{3x^2-3x}$.

Ex. 13. Divisez $9x^6-46x^5+95x^2+150x$ par x^2-4x-5.
Rép. $9x^4-10x^3+5x^2-30x$.

Ex. 14. Divisez $x^4-\frac{13}{6}x^3-x^2+\frac{1}{3}x-2$ par $\frac{4}{3}x-2$.
Rép. $\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+1$.

PROBLÈMES

QUI NE PRÉSENTENT QUE DES ÉQUATIONS SIMPLES, A UNE SEULE INCONNUE.

PROB. 62. On a un poisson dont la queue pèse *9lbs.*; la tête pèse autant que la queue et la moitié du corps, et le corps pèse autant que la tête et la queue ensemble. Quel est le poids du poisson ?

Soit $2x$=le poids du corps en *lb.*;
alors $9+x$=le poids de la queue $+\frac{1}{2}$ du corps = le poids de la tête.

Mais le corps pèse autant que la tête et la queue;

$$\therefore\ 2x=(9+x)+9,$$
$$2x=x+18\ ;$$
$$\therefore\ x=18,$$
$$\text{et}\ \therefore\ 2x=36, \text{ poids du corps en } lbs.,$$
$$9+x=27, \text{ poids de la tête en } lbs.,$$

et le poids du poisson$=36+27+9=72 lbs.$

Prob. 63. Un domestique s'engage à servir un an pour £8 et sa livrée, mais quittant le service au bout de 7 mois, il ne reçu que £2 13*s.* 4*d.* et sa livrée ; quel était la valeur de la livrée ?

Soit $12x$=valeur de la livrée en *deniers*.
Mais £8=1920*d.*, et £2 13*s.* 4*d.*=640*d.*;
alors, les gages pour 12 mois$=12x+1920$;

$$\therefore \text{ les gages pour 1 mois}=\frac{12x+1920}{12}=x+160.$$

$$\text{et } \therefore \text{ les gages pour 7 mois}=(x+160)\ 7.$$

Mais les gages reçus actuellement pour les 7 mois $=12x+640$;

$$\therefore\ 12x+640=7x+1120\ ;$$
$$\therefore\ 5x=480,$$
$$x=96\ ;$$
$$\text{et}\ \therefore\ 12x=1152d.=£4\ 16s., \text{valeur de la livrée.}$$

On voit par les deux solutions précédentes qu'en donnant x *avec un certain coefficient pour quantité inconnue*, on obtient une équation dégagée de fractions.

Il est souvent, non seulement plus expéditif de faire une telle assomption ; mais la solution que l'on obtient ainsi est ordinairement plus élégante.

Le coefficient de l'x doit être un multiple du dénominateur de toutes les fractions comprises dans le problème.

PROB. 64. Une citerne est remplie en 20 minutes par 3 tuyaux, l'un desquels donne 10 gallons de plus et l'autre 5 gallons de moins, qu'un troisième par minute. La citerne contient 820 gallons. Combien de gallons fournit chaque tuyau par minute?
Rép. 22, 7 et 12 gallons chaque.

PROB. 65. A et B ont le même revenu: A épargne $\frac{1}{5}$ du sien ; mais B en dépensant £60 par année plus que A, se trouve endetté de £160 au bout de 4 ans. Quelle était leur revenu annuel? *Rép.* £100.

PROB. 66. A rencontre deux mendiants, B et C, et ayant une certaine somme dans sa bourse, il en donne $\frac{1}{6}$ à B et $\frac{3}{5}$ du reste à C: après quoi il ne lui reste plus que 20 *deniers*. Qu'avait-il d'abord? *Rép.* 5*s*.

PROB. 67. Un homme a deux chevaux, et une selle de la valeur de £60 : si l'on met la selle sur le premier cheval, sa valeur sera double de celle du second ; mais si on la met sur le deuxième cheval sa valeur devient triple de celle du premier. Quel est le prix de chaque cheval? *Rép.* £36 et £48.

PROB. 68. Un joueur perdit le $\frac{1}{5}$ de son argent à un premier jeu, et gagna ensuite 18*s*.; à un second tour il perdit $\frac{1}{3}$ du reste, après quoi il gagna 3*s*., et se retira du jeu avec 3 guinées. Qu'avait-il en commençant?

Soit $15x$=le nombre de chelins qu'il avait d'abord ; en ayant perdu $\frac{1}{5}$ il ne lui en restait plus que les $\frac{4}{5}$, ou $12x$; il gagna alors 18*s*., il avait donc en main $12x+18$; perdant $\frac{1}{3}$ de ceci il ne lui en restait que les $\frac{2}{3}$, ou $8x+12$; enfin il gagna 3*s*., ce qui lui fesait $(8x+12)+3s.$, somme qui d'après la donnée devait égaler 3 guinées, ou 63*s*.

$$\therefore (8x+12)+3=63,$$
$$8x+12=60\ ;$$
$$\therefore 8x=48,$$
$$x=6\ ;$$
$$\therefore 15x=90s.=£4\ 10s.$$

Prob. 69. Une personne perdit un tiers de son argent et gagna ensuite 4*s*.; elle perdit encore un quart de son argent, et gagne alors 13*s*.; enfin, elle perdit un huitième de ce qui lui restait, et se retira avec 28*s*. Qu'avait-elle d'abord ? *Rép.* £1 12*s*.

CHAPITRE III.

DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

40. Les Règles qui se rapportent aux Fractions Algébriques sont les mêmes que celles usitées dans l'arithmétique ordinaire.

Voici les principes sur lesquels ces règles sont établies dans les deux sciences :—

(1.) Si l'on multiplie le numérateur, ou si l'on divise le dénominateur d'une fraction par une quantité quelconque, l'on rend sa valeur autant de fois plus grande.

(2.) Si l'on divise le numérateur, ou si l'on multiplie le dénominateur d'une fraction par une quantité quelconque, l'on rend sa valeur autant de fois plus petite.

(3.) Si l'on multiplie ou si l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par une quantité quelconque, la fraction ne change pas de valeur.

FRACTIONS ALGEBRIQUES.

41. *Réduire une quantité fractionnaire en fraction.*

Règle. " Multipliez l'*entier* par le dénominateur de la fraction, et au *produit* ajoutez le numérateur avec son propre signe; sous cette *somme*, écrivez le dénominateur primitif et le résultat donne la fraction demandée."

Les règles qui se rapportent aux fractions algébriques sont-elles les mêmes que celles qui se rapportent aux fractions vulgaires? Dites-nous les principes sur lesquels ces règles sont établies dans les deux sciences. Que faut-il faire pour réduire une quantité fractionnaire en fraction ?

Ex. 1.

Réduisez $3a+\frac{2x}{5a^2}$ en fraction.

L'entier $\times$ le *dénominateur* de la fraction $+$ le *numérateur* $=3a\times 5a^2+2x=15a^3+2x$;

D'où, $\frac{15a^3+2x}{5a^2}$ est la fraction demandée.

Ex. 2.

Réduisez $5x-\frac{4x}{6a^2}$ à une seule fraction.

Ici $5x\times 6a^2=30a^2x$; à quoi il faut ajouter le numérateur avec son propre signe, savoir, $-4x$; alors $\frac{30a^2x-4x}{6a^2}$ est la fraction demandée.

Ex. 3.

Réduisez $5x-\frac{2x-3}{7}$ à une seule fraction.

Ici $5x\times 7=35x$. En additionnant le numérateur $2x-3$ *avec son propre signe*, il faut se rappeler, que le signe $-$ dont la fraction $\frac{2x-3}{7}$ est précédée signifie que *toute* cette fraction doit être *soustraite*, et conséquemment, que les signes de chaque terme du numérateur doivent être *changés* lorsqu'elle est combinée avec $35x$; d'où la fraction demandée est $\frac{35x-2x+3}{7}=\frac{35x+3}{7}$.

Ex. 4. Réduisez $4ab+\frac{2c}{3a}$ en une seule fraction?

Rép. $\frac{12a^2b+2c}{3a}$.

Ex. 5. Réduisez $3b^2-\frac{4a}{5x}$ en une seule fraction?

Rép. $\frac{15b^2x-4a}{5x}$.

Ex. 6. Réduisez $a-x+\frac{a^2+ax}{x}$ en une seule fraction.

Rép. $\frac{a^2+x^2}{x}$.

Ex. 7. Réduisez $3xa^2-\frac{4x+9}{10}$ en une seule fraction.

Rép. $\frac{30x^2-4x+9}{10}$.

42. *Réduire une fraction en quantité fractionnaire.*

Règle. " Voyez quels sont les termes du ***numérateur*** qui sont divisibles par le *dénominateur* sans reste, le quotient donnera les *entiers*, à quoi il faut joindre (avec leurs signes propres) les termes restants du numérateur, qui devient le numérateur d'une nouvelle fraction qui prend le dénominateur primitif."

Ex. 1.

Soit $\frac{a^2+ab+b^2}{a}$ à réduire en entiers et fractions.

Ici $\frac{a^2+ab}{a}=a+b=$les entiers,

et $\frac{b^2}{a}=$la fraction ;

$\therefore\ a+b+\frac{b^2}{a}=$*Rép.*

Ex. 2.

Soit $\frac{15a^2+2x-3c}{5a}$ à réduire en entiers.

Ici $\frac{15a^2}{5a}=3a=$les entiers,

et $\frac{2x-3c}{5a}=$la fraction ;

$\therefore\ 3a+\frac{2x-3c}{5a}=$*Rép.*

Que faut-il faire pour réduire une fraction en entiers ?

Ex. 3. Soit $\frac{4x^2-5a}{2x}$ à réduire en entiers.

Rép. $2x-\frac{5a}{2x}$.

Ex. 4. Soit $\frac{12a^2+4a-3c}{4a}$ à réduire en entiers.

Rép. $3a+1-\frac{3c}{4a}$.

Ex. 5. Soit $\frac{10x^2y+3x^3-2b^2}{x^2}$ à réduire en entiers.

Rép. $10y+3x-\frac{2b^2}{x^2}$.

43. *Réduction des fractions à un dénominateur commun.*

Règle. " Multipliez chaque numérateur par le produit de tous les dénominateurs, *le sien excepté,* et les produits seront ses nouveaux numérateurs qui prendront pour dénominateur commun le produit de tous les dénominateurs."

Ex. 1.

Soit $\frac{2x}{3}, \frac{5x}{b}$, et $\frac{4a}{5}$, à réduire à un com. dénominateur.

$$\left.\begin{array}{l} 2x\times b\times 5=10bx \\ 5x\times 3\times 5=75x \\ 4a\times 3\times b=12ab \end{array}\right\} \text{nouveaux numérateurs;}$$

$$3\times b\times 5=15b \text{ com. dénominateur;}$$

D'où les fractions demandées sont $\frac{10bx}{15b}, \frac{75x}{15b}, \frac{12ab}{15b}$.

Ex. 2.

Soit $\frac{2x+1}{5}$, et $\frac{3x}{4}$, à réduire à un com. dénominateur.

$$\text{Ici } \left.\begin{array}{r} (2x+1)\times 4=8x+4 \\ 3x\times 5=15x \end{array}\right\} \text{nouveaux numérateurs;}$$

$$5\times 4=20 \text{ com. dénominateur;}$$

D'où les fractions demandées sont $\frac{8x+4}{20}$, et $\frac{15x}{20}$.

Quelle est la règle pour la réduction des fractions au même dénominateur?

Ex. 3.

Soit $\frac{5x}{a+x}$, $\frac{a-x}{3}$ et $\frac{1}{2x}$, à réduire à un com. dénomin.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ici } 5x\times 3\times 2x & =30x^2\\ (a-x)\ (a+x)\times 2x & =2a^2x-2x^3\\ 1\ \times(a+x)\times 3 & =3a\ \ +3x\\ \hline (a+x)\times 3\times 2x & =6ax+6x^2\end{array}\right\} \therefore \text{ les nouvelles fractions sont } \frac{30x^2}{6ax+6x^2}, \frac{2a^2x-2x^3}{6ax+6x^2} \text{ et } \frac{3a+3x}{6ax+6x^2}.$$

Ex. 4. Soit $\frac{3x}{5}$, $\frac{4bx}{3a}$, et $\frac{5x^2}{a}$, à réduire à un commun dénominateur. *Rép.* $\frac{9a^2x}{15a^2}$, $\frac{20abx}{15a^2}$, et $\frac{75ax^2}{15a^2}$.

Ex. 5. Soit $\frac{2x+3}{x}$, et $\frac{5x+1}{3}$, à réduire à un commun dénominateur. *Rép.* $\frac{6x+9}{3x}$, et $\frac{5x^2+x}{3x}$.

Ex. 6. Soit $\frac{4x^2+2x}{5}$, $\frac{3x^2}{4a}$, et $\frac{2x}{3b}$, à réduire à un commun dénominateur.

Rép. $\frac{48abx^2+24abx}{60ab}$, $\frac{45bx^2}{60ab}$, et $\frac{40ax}{60ab}$.

Ex. 7. Soit $\frac{7x^2-1}{2x}$, et $\frac{4x^2-x+2}{2a^2}$, à réduire à un com. dénominateur. *Rép.* $\frac{14a^2x^2-2a^2}{4a^2x}$, et $\frac{8x^3-2x^2+4x}{4a^2x}$.

44. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression.*

RÈGLE. « Cherchez quelle est la quantité qui pourra diviser tous les termes du numérateur et du dénominateur sans reste ; divisez les par cette quantité, et la fraction se trouve réduite à sa plus simple expression. »

Démontrez la manière de réduire les fractions à leur plus simple expression.

Ex. 1.

Soit $\frac{14x^3+7ax+21x^2}{35x^2}$ à réduire à sa plus simple expression.

Le coefficient de chaque terme du numérateur et du dénominateur de cette fraction est divisible par 7, et la lettre x se rencontre aussi dans chaque terme; donc $7x$ divisera et le numérateur et le dénominateur sans reste.

Maintenant $\frac{14x^3+7ax+21x^2}{7x}=2x^2+a+3x,$

et $\frac{35x^2}{7x}=5x$;

D'où la fraction réduite à sa plus simple expression est $\frac{2x^2+a+3x}{5x}$.

Ex. 2.

Soit $\frac{20abc-5a^2+10ac}{5a^2c}$ à réduire à sa plus simple expression.

Ici la quantité qui divise le numérateur et le dénominateur sans reste est $5a$; la fraction dans sa plus simple expression est donc $\frac{4bc-a+2c}{ac}$.

Ex. 3.

Soit $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ à réduire à sa plus simple expression.

Ici $a-b$ divisera le numérateur et le dénominateur, car par l'Ex. 2. III^e Cas, page 40. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; d'où $\frac{1}{a+b}$ est la fraction réduite à sa plus simple expression.

Ex. 4. Soit $\frac{10x^3}{15x^2}$ à réduire à sa plus simple expression.

Rép. $\frac{2x}{}$

Ex. 5. Soit $\frac{3abx^2}{6ax}$ à réduire à sa plus simple expression. *Rép.* $\frac{bx}{2}$.

Ex. 6. Soit $\frac{14x^2y^2-21x^3y^2}{7x^3y}$ à réduire à sa plus simple expression. *Rép.* $\frac{2y-3xy}{x}$.

Ex. 7. Soit $\frac{51x^3-17x^2+34x}{17x^6}$ à réduire à sa plus simple expression. *Rép.* $\frac{3x^2-x+2}{x^4}$.

DE L'ADDITION, LA SOUSTRACTION, LA MULTIPLICATION, ET LA DIVISION DES FRACTIONS.

45. *De l'Addition.*

Règle. « Réduisez les fractions à un commun dénominateur, et puis additionnez ensemble leurs numérateurs; réduisez la fraction résultante à sa plus simple expression, et vous aurez la fraction demandée.»

Ex. 1.

Additionnez $\frac{3x}{5}$, $\frac{2x}{7}$, et $\frac{x}{3}$, ensemble.

$$\left.\begin{array}{r} 3x\times7\times3=63x \\ 2x\times5\times3=30x \\ x\times5\times7=35x \\ \hline 5\times7\times3=105 \end{array}\right\}\therefore \frac{63x+30x+35x}{105}=\frac{128x}{105}=\text{la somme demandée.}$$

Ex. 2. Additionnez $\frac{a}{b}$, $\frac{2a}{3b}$, et $\frac{5b}{4a}$, ensemble.

$$\left.\begin{array}{r} a\times3b\times4a=12a^2b \\ 2a\times b\times4a=8a^2b \\ 5b\times b\times3b=15b^3 \\ \hline b\times3b\times4a=12ab^2 \end{array}\right\}\therefore \frac{12a^2b+8a^2b+15b^3}{12ab^2}=\frac{20a^2b+15b^3}{12ab^2}$$

$=$(divisant par b) $\frac{20a^2+15b^2}{12ab}$ la somme demandée.

Enoncez la règle pour l'addition des fractions.

Ex. 3. Additionnez $\frac{2x+3}{5}$, $\frac{3x-1}{2x}$, et $\frac{4x}{7}$, ensemble.

$$\begin{array}{l} (2x+3)\times 2x\times 7=28x^2+42x \\ (3x-1)\times 5\ \times 7=105x-35 \\ \quad 4x\times 5\times 2x=40x^2 \\ \hline \quad 5\times 2x\times 7=70x \end{array} \quad \therefore \frac{28x^2+42x+105x-35+40x^2}{70x}$$

$$=\frac{68x^2+147x-35}{70x}=$$

la somme demandée.

Ex. 4. Additionnez $\frac{3x}{7}$, $\frac{5x}{9}$, et $\frac{4x}{11}$, ensemble.

Rép. $\frac{934x}{693}$.

Ex. 5. Additionnez $\frac{3a^2}{2b}$, $\frac{2a}{5}$, et $\frac{3b}{7a}$, ensemble.

Rép. $\frac{105a^3+28a^2b+30b^2}{70ab}$.

Ex. 6. Additionnez $\frac{2x+1}{3}$, $\frac{4x+2}{5}$, et $\frac{x}{7}$, ensemble.

Rép. $\frac{169x+77}{105}$.

Ex. 7. Additionnez $\frac{5a^2+b}{3b}$, et $\frac{4a^2+2b}{5b}$, ensemble.

Rép. $\frac{37a^2+11b}{15b}$.

Ex. 8. Additionnez $\frac{2x-5}{3}$, et $\frac{x-1}{2x}$, ensemble.

Rép. $\frac{4x^2-7x-3}{6x}$.

Ex. 9. Additionnez $\frac{x}{x-3}$, et $\frac{x}{x+3}$, ensemble.

Rép. $\frac{2x^2}{x^2-9}$.

Ex. 10. Additionnez $\frac{a+b}{a-b}$, et $\frac{a-b}{a+b}$, ensemble.

Rép. $\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$.

46. *De la Soustraction des quantités fractionnaires.*

Règle. « Réduisez les fractions à un dénominateur commun; soustrayez ensuite les numérateurs l'un de l'autre et sous la différence écrivez le dénominateur commun. »

Ex. 1.

De $\frac{14x}{15}$ ôtez $\frac{3x}{5}$.

$$\left.\begin{array}{r} 3x\times 15=45x \\ 14x\times \ 5=70x \\ \hline 5\ \times 15=75 \end{array}\right\}\therefore \frac{70x-45x}{75}=\frac{25x}{75}=\frac{x}{3}=\text{la différence demandée.}$$

Ex. 2.

De $\frac{5x+2}{7}$ ôtez $\frac{2x+1}{3}$

$$\left.\begin{array}{r} (2x+1)\times 7=14x+7 \\ (5x+2)\times 3=15x+6 \\ \hline 3\times 7=21 \end{array}\right\}\therefore \frac{15x+6-14x-7}{21}=\frac{x-1}{21}= \text{la fraction demandée.}$$

Ex. 3.

De $\frac{10x-9}{8}$ ôtez $\frac{3x-5}{7}$.

$$\left.\begin{array}{r} (10x-9)\times 7=70x-63 \\ (\ 3x-5)\times 8=24x-40 \\ \hline 8\times 7=56 \end{array}\right\}\therefore \frac{70x-63-24x+40}{56}=\frac{46x-23}{56} =\text{la fraction demandée.}$$

Ex. 4.

De $\frac{a+b}{a-b}$ ôtez $\frac{a-b}{a+b}$.

$$\left.\begin{array}{r} (a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2 \\ \hline (a-b)(a\times b)=a^2-b^2 \end{array}\right\}\therefore \frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2} =\frac{4ab}{a^2-b^2}=\text{la fraction demandée.}$$

Quelle est la règle pour la soustraction des fractions ?

Ex. 5. De $\frac{9x}{10}$ ôtez $\frac{4x}{5}$. *Rép.* $\frac{x}{10}$.

Ex. 6. De $\frac{21x+3}{4}$ ôtez $\frac{5x+1}{7}$. *Rép.* $\frac{127x+17}{28}$.

Ex. 7. De $\frac{4x}{5}$ ôtez $\frac{3x+1}{x+1}$. *Rép.* $\frac{4x^2-11x-5}{5x+5}$.

Ex. 8. De $\frac{4x+2}{3}$ ôtez $\frac{2x-3}{3x}$. *Rép.* $\frac{4x^2+3}{3x}$.

Ex. 9. De $\frac{1}{a-b}$ ôtez $\frac{1}{a+b}$. *Rép.* $\frac{2b}{a^2-b^2}$.

Ex. 10. De $\frac{4x}{7}$ ôtez $\frac{3x-7}{8}$. *Rép.* $\frac{11x+49}{56}$.

47. *De la Multiplication des quantités fractionnaires.*

Règle. "Multipliez leurs numérateurs ensemble pour avoir un nouveau numérateur, et leurs dénominateurs ensemble pour avoir un nouveau dénominateur, puis réduisez la fraction résultante à sa plus simple expression."

Ex. 1.

Multipliez $\frac{2x}{7}$ par $\frac{4x}{9}$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x \times 4x = 8x^2 \\ 7 \times 9 = 63 \end{array}\right\} \therefore \text{la fraction dêmandée} = \frac{8x^2}{63}.$$

Ex. 2.

Multipliez $\frac{4x+1}{3}$ par $\frac{6x}{7}$.

Ici $(4x+1) \times 6x = 24x^2 + 6x$ et $3 \times 7 = 21$ $\therefore$ $\frac{24x^2+6x}{21}$ = (divisant le numérateur et le dénominateur par 3) $\frac{8x^2+2x}{7}$ = la fraction demandée.

Enoncez la règle pour la multiplication des fractions ?

Ex. 3.

Multipliez $\frac{a^2-b^2}{5b}$ par $\frac{3a^2}{a+b}$.

Par le 2me Ex. IIIe Cas, page 40, $(a^2-b^2)\times 3a^2 = (a+b)(a-b)\times 3a^2$; d'où le produit est $\frac{3a^2\times(a+b)(a-b)}{5b\times(a+b)}$ =(divisant le numérateur et le dénominateur par $a+b$) $\frac{3a^2\times(a-b)}{5b}=\frac{3a^3-3a^2b}{5b}$.

Ex. 4.

Multipliez $\frac{3x^2-5x}{14}$ par $\frac{7a}{2x^3-3x}$.

Ici
$(3x^2-5x)\times 7a = 21ax^2-35ax$
et
$(2x^3-3x)\times 14 = 28x^3-42x$

$\therefore \frac{21ax^2-35ax}{28x^3-42x}$ = divisant le numérateur et le dénominateur par $7x$) $\frac{3ax-5a}{4x^2-6}$ = la fraction demandée.

Ex. 5. Multipliez $\frac{2x}{x-1}$ par $\frac{3x}{7}$. *Rép.* $\frac{6x^2}{7x-7}$.

Ex. 6. Multipliez $\frac{3x^2-x}{5}$ par $\frac{10}{2x^2-4a}$. *Rép* $\frac{3x-1}{x-2}$.

Ex. 7. Multipliez $\frac{2a}{a-b}$ par $\frac{a^2-b^2}{8}$. *Rép.* $\frac{a^2+ab}{4}$.

Ex. 8. Multipliez $\frac{3x^2}{5x-10}$ par $\frac{15x-30}{2x}$. *Rép.* $\frac{9x}{2}$.

48. *De la Division des Fractions.*

RÈGLE. " ***Renversez*** le diviseur et opérez comme dans la Multiplication."

Enoncez la règle pour la Division des Fractions ?

Ex. 1.

Divisez $\frac{14x^2}{9}$ par $\frac{2x}{3}$.

Renversez le diviseur, et il devient $\frac{3}{2x}$; d'où $\frac{14x^2}{9}\times\frac{3}{2x}$ $=\frac{42x^2}{18x}=\frac{7x}{3}$ (divisant le numérateur et le dénominateur par $6x$)$=$la fraction demandée.

Ex. 2.

Divisez $\frac{14x-3}{5}$ par $\frac{10x-4}{25}$.

$$\frac{14x-3}{5}\times\frac{25}{10x-4}=\frac{(14x-3)\times 5}{10x-4}=\frac{70x-15}{10x-4}.$$

Ex. 3.

Divisez $\frac{5a^2-5b^2}{2a}$ par $\frac{4a+4b}{6b}$.

$$\frac{5a^2-5b^2}{2a}=\frac{5\times(a+b)(a-b)}{2a}$$
$$\frac{4a+4b}{6b}=\frac{4\times(a+b)}{6b};$$

$$\therefore\frac{5\times(a+b)(a-b)}{2a}\times\frac{6b}{4\times(a+b)}=\frac{30b\times(a-b)}{8a}=\frac{15ab-15b^2}{4a}$$
$=$la fraction demandée.

Ex. 4. Divisez $\frac{4x}{7}$ par $\frac{9x}{5}$. *Rép.* $\frac{20}{63}$.

Ex. 5. Divisez $\frac{4x+2}{3}$ par $\frac{2x+1}{5x}$. *Rép.* $\frac{10x}{3}$.

Ex. 6. Divisez $\frac{x^2-9}{5}$ par $\frac{x+3}{4}$. *Rép.* $\frac{4x-12}{5}$.

Ex. 7. Divisez $\frac{9x^2-3x}{5}$ par $\frac{x^2}{5}$. *Rép.* $\frac{9x-3}{x}$.

SOLUTION DES ÉQUATIONS SIMPLES A UNE SEULE INCONNUE.

3me RÈGLE.

49. On peut dégager une équation des fractions en multipliant successivement chacun de ses membres par les dénominateurs des fractions.

Ou bien, on peut dégager une équation des fractions en multipliant chaque membre de l'équation par le plus *petit commun multiple* des dénominateurs des fractions.

On déduit cette règle de l'axiôme (4), que, si des quantités égales sont multipliées par la même quantité (ou par des quantités égales), les produits provenant seront égaux.

Ex. 1. Soit $\frac{x}{3}=6.$

Multipliez chaque membre de l'équation par 3 ; alors (puisque la multiplication de la fraction $\frac{x}{3}$ par 3 ne fait que détruire le dénominateur en laissant x pour produit) nous avons $x=6\times 3=18.$

Ex. 2. Soit $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}=7.$

Multipliant chaque membre de l'équation par 2, nous avons $x+\frac{2x}{5}=14.$

Ensuite *multipliant* chaque membre de cette équation par 5, elle devient

$$5x+2x=70,$$
$$7x=70\,;$$
$$\therefore\ x=10.$$

Ex. 3. Soit $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=13-\frac{x}{4}.$

Multipliez chaque membre par 2, alors $x+\frac{2x}{3}=26-\frac{2x}{4}.$

Multipliez chaque membre par 3 et $3x+2x=78-\frac{6x}{4}$.

" " " par 4 et $12x+8x=312-6x$.

Par transposition, $12x+8x+6x=312$,

$$26x=312\,;$$

$$\therefore\quad x=12.$$

Cet exemple aurait pu être résolu plus simplement, en multipliant chaque membre de l'équation par le plus *petit commun multiple* des nombres 2, 3, 4, qui est 12.

Ainsi, $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=13-\frac{x}{4}$.

Multipliez chaque memb. par 12, $\frac{12x}{2}+\frac{12x}{3}=156-\frac{12x}{4}$,

ou, $6x+4x=156-3x$.

Par transposition, $6x+4x+3x=156$,

$$13x=156\,;$$

$$\therefore\quad x=12.$$

Ex. 4. Soit $\frac{2x}{3}+\frac{x}{4}=22$. *Rép.* $x=24$.

Ex. 5. Soit $\frac{7x}{4}-\frac{5x}{6}=\frac{55}{6}$. *Rép.* $x=10$.

Ex. 6. Soit $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=31-\frac{x}{5}$. *Rép.* $x=30$.

Ex. 7. Soit $\frac{2x}{5}-\frac{x}{6}+\frac{x}{2}=44$. *Rép.* $x=60$.

50. Dans l'application des Règles à la solution des équations simples en général, ne renfermant qu'une seule inconnue, il est à propos d'observer la méthode suivante.

(1.) Dégager l'équation des fractions par la IIIe Règle.

(2.) Assembler les quantités *inconnues* dans un membre de l'équation, et les *connues* dans l'autre, par la IIe Règle.

Dites la marche à suivre pour résoudre une équation simple, ne renfermant qu'une seule inconnue.

(3.) Trouvez la valeur de l'inconnue en divisant chaque membre de l'équation par son coefficient, comme dans la Ire Règle.

Ex. 1.

Déterminez la valeur d'x dans l'équation

$$\frac{3x}{7}+1=\frac{x}{5}+\frac{13}{5}.$$

Multipliez par 7, alors $3x+7=\frac{7x}{5}+\frac{91}{5}.$

" par 5, alors $15x+35=7x+91.$

Rassemblez les quantités inconnues dans un membre et les quantités connues dans l'autre ; $15x-7x=91-35,$ ou $8x=56.$

Divisez par le coefficient d'x, $x=\frac{56}{8}=7.$

Ex. 2.

Déterminez la valeur d'x dans l'équation

$$\frac{x+3}{5}-1=2-\frac{x}{7}.$$

Multipliez par 5, alors $x+3-5=10-\frac{5x}{7};$

" par 7, alors $7x+21-35=70-5x.$

Rassemblez les quantités inconnues dans un membre et les quantités connues dans l'autre ; $7x+5x=70+35-21.$ ou $12x=84;$

$$\therefore x=\frac{84}{12}=7.$$

Ex. 3.

Déterminez la valeur de l'x dans l'équation

$$4x-\frac{x-1}{2}=x+\frac{2x-2}{5}+24.$$

Multipliez par le plus petit commun multiple (10), $40x-5x+5=10x+4x-4+240.$

Par transposition, $40x - 5x - 10x - 4x = 240 - 4 - 5$.

$$\text{ou } 40x - 19x = 231,$$
$$\text{c'est-à-dire } 21x = 231;$$
$$\therefore x = \frac{231}{21} = 11.$$

Comme dans cet Exemple il se présente tout d'abord le cas " où le signe — précède une fraction," quand le numérateur est abaissé à la même ligne avec $40x$, il faut *changer* les signes de ses deux termes, pour les raisons données dans l'Ex. 3, page 44; et ainsi nous le faisons $-5x+5$, et non pas $5x-5$.

Ex. 4.

Déterminez la valeur d'x dans l'équation

$$2x - \frac{x}{2} + 1 = 5x - 2.$$

Multipliez par 2, alors $4x - x + 2 = 10x - 4$.

Par transposition, $4 + 2 = 10x - 4x + x$,

$$\text{ou } 6 = 7x;$$
$$\therefore \frac{6}{7} = x.$$
$$\text{ou } x = \frac{6}{7}.$$

Ex. 5.

Quelle est la valeur de l'x dans l'équation $3ax + 2bx = 3c + a$?

$$\text{Ici } 3ax + 2bx = (3a + 2b) \times x;$$
$$\therefore (3a + 2b) \times x = 3c + a.$$

Divisez chaque membre de l'équation par $3a + 2b$, qui est le cofficient d'x; alors $x = \frac{3b + a}{3a + 2b}$.

Ex. 6.

Trouvez la valeur de l'x dans l'équation $3bx + a = 2ax + 4c$. Rassemblez les quantités inconnues dans un membre de l'équation et les quantités connues dans l'autre; alors

$$3bx-2ax=4c-a\,;$$
$$\text{mais } 3bx-2ax=(3b-2a)\times x\,;$$
$$\therefore\ (3b-2a)x=4c-a.$$

Divisez par $3b-2a$, et $x=\frac{4c-a}{3b-2a}$.

Ex. 7.

Trouvez la valeur de l'x dans l'équation $bx+x=2x+3a$.
Transposez $2x$, alors $bx+x-2x=3a$,

$$\text{ou } bx-\ x=3a\,;$$
$$\text{mais } bx-\ x=(b-1)x\,;$$
$$\therefore\ (b-1)\ x=3a,$$
$$\text{et } x=\frac{3a}{b-1}.$$

Ex. 8. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11$. *Rép.* $x=6$.

Ex. 9. $\frac{x}{5}+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+17$. *Rép.* $x=60$.

Ex. 10. $4x-20=\frac{3x}{7}+\frac{110}{7}$. *Rép.* $x=10$.

Ex. 11. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$. *Rép.* $x=\frac{6}{7}$.

Ex. 12. $3x+\frac{1}{9}=\frac{x+3}{3}$. *Rép.* $x=\frac{1}{3}$.

Ex. 13. $\frac{3x}{7}-5=29-2x$. *Rép.* $x=14$.

Ex. 14. $6x-\frac{3x}{4}-9=5x$. *Rép.* $x=36$.

Ex. 15. $2x-\frac{x+3}{3}+15=\frac{12x+26}{5}$. *Rép.* $x=12$.

Ex. 16. $\frac{x-2}{2}+\frac{x}{3}=20-\frac{x-6}{2}$. *Rép.* $x=18$.

Ex. 17. $5x-\frac{2x-1}{3}+1=3x+\frac{x+2}{2}+7$. *Rép.* $x=8$.

Ex. 18. $2ax+b=3cx+4a$. *Rép.* $x=\frac{4a-b}{2a-3c}$.

Ex. 19.

$$3x-4-\frac{4}{5}\times\frac{7x-9}{3}=\frac{4}{5}\left(6+\frac{x-1}{3}\right);\ \text{trouvez } x.$$

Multipliez par 15, $45x-60-28x+36=72+4x-4.$

$$45x-28x-4x=72-4+60-36,$$
$$13x=92\,;$$
$$\therefore\ x=7\tfrac{1}{13}.$$

Ex. 20.

$$\frac{4x+3}{9}+\frac{7x-29}{5x-12}=\frac{8x+19}{18};\ \text{trouvez } x.$$

Mult. par 18, $8x+6+\dfrac{126x-522}{5x-12}=8x+19.$

$$\frac{126x-522}{5x-12}=13.$$

Multipliez par $5x-12$, $126x-522=65x-156,$

$$126x-65x=522-156,$$
$$61x=366\,;$$
$$\therefore\ x=6.$$

Ex. 21.

Soit $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+7}=\dfrac{1}{7\,(x-1)}$; trouvez x.

Mult. par $7(x-1)$, $7-\dfrac{14\,(x-1)}{x+7}=1.$

$$6=\frac{14\,(x-1)}{x+7}.$$

Divisez par 2, $3=\dfrac{7\,(x-1)}{x+7}.$

$$3x+21=7x-7,$$
$$7x-3x=21+7,$$
$$4x=28\,;$$
$$\therefore\ x=7.$$

Ex. 22.

Soit $\dfrac{8x+5}{14}+\dfrac{7x-3}{6x+2}=\dfrac{16x+15}{28}+\dfrac{2\frac{1}{4}}{7}$; trouvez x.

Mult. par 28, $16x+10+\frac{196x-84}{6x+2}=16x+15+9.$

$$\frac{196x-84}{6x+2}=14.$$

$$196x-84=84x+28,$$

$$112x=112;$$

$$\therefore\ x=1.$$

Ex. 23. $\frac{3x-3}{4}-\frac{3x-4}{3}=5\frac{1}{3}-\frac{27+4x}{9}.$ *Rép.* 9.

Ex. 24. $\frac{9x+20}{36}=\frac{4x-12}{5x-4}+\frac{x}{4}.$ *Rép.* 8.

Ex. 25. $\frac{20x+36}{25}+\frac{5x+20}{9x-16}=\frac{4x}{5}+\frac{86}{25}.$ *Rép.* 4.

Ex. 26. $\frac{2x+8\frac{1}{2}}{9}+\frac{13x-2}{17x-32}+\frac{x}{3}=\frac{7x}{12}-\frac{x+16}{36}.$ *Rép.* 4.

Ex. 27. $4(5x-3)-64(3-x)-3(12x-4)=96.$ *R.* 6.

Ex. 28. $10(x+\frac{1}{2})-6x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)=23.$ *Rép.* 2.

Ex. 29. $\frac{30+6x}{x+1}+\frac{60+8x}{x+3}=14+\frac{48}{x+1}.$ *Rép.* 3.

PROBLÈMES.

PROB. 70. Quel est le nombre auquel si l'on ajoute 10, les $\frac{3}{5}$ de la somme seront 66 ?

Soit x=le nombre demandé ;

alors $x+10$=le nombre avec 10 ajouté.

Or, les $\frac{3}{5}$ de $(x+10)=\frac{3}{5}(x+10)=\frac{3\,(x+10)}{5}=\frac{3x+30}{5}.$

Mais, par la donnée, $\frac{3}{5}$ de $(x+10)=66$;

D'où, $\frac{3x+30}{5}=66.$

Multipliez par 5, alors $3x+30=330$;

$\therefore\ 3x=330-30=300$; ou $x=\frac{300}{3}=100.$

Prob. 71. Quel est le nombre qui, étant multiplié par 6, le produit augmenté de 18, et cette somme divisée par 9, donnera 20 au quotient?

Soit x=le nombre demandé;

alors $6x$=le nombre multiplié par 6;

$6x+18$=le produit augmenté de 18,

et $\frac{6x+18}{9}$=cette somme divisée par 9.

D'où par la donnée, $\frac{6x+18}{9}=20$.

Multipliez par 9, alors $6x+18=180$,

ou $6x=180-18=162$; ou $x=\frac{162}{6}=27$.

Prob. 72. Le $\frac{1}{5}$ d'un poteau est en terre, les $\frac{3}{7}$ dans l'eau, et il en reste 13 pieds hors de l'eau. Quelle est la longueur du poteau?

Soit x=la longueur du poteau en pieds;

alors $\frac{x}{5}$=la partie en terre.

$\frac{3x}{7}$=la partie dans l'eau,

13=la partie hors de l'eau.

Mais la partie en terre + la partie dans l'eau + la partie hors de l'eau = le poteau entier;

$$\therefore \left(\frac{x}{5}\right) + \left(\frac{3x}{7}\right) + 13 = x.$$

Mult. par 5, alors $x+\frac{15x}{7}+65=5x$;

Mult. par 7, alors $7x+15x+455=35x$,

ou $455=35x-7x-15x=13x$.

D'où $x=\frac{455}{13}=35$=longueur du poteau en pieds.

Prob. 73. Après avoir donné le $\frac{1}{4}$ et le $\frac{1}{7}$ de mon argent il m'est resté £85. Combien d'argent avais-je d'abord?

Soit x=l'argent que j'avais;

alors $\frac{x}{4}+\frac{x}{7}=$l'argent donné.

Mais l'argent primitif—l'argent donné=l'argent qui reste.

$$\text{D'où } x-\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{7}\right)=85,$$

$$\text{c'est-à-dire, } x-\frac{x}{4}-\frac{x}{7}=85.$$

Multipliez par 4, alors $4x-x-\frac{4x}{7}=340$;

Multipliez par 2, alors $28x-7x-4x=2380$.

$$\therefore\ 17x=2380\ ;$$

$$\text{or } x=\frac{2380}{17}=£140.$$

PROB. 74. Quel est le nombre, auquel si on ajoute 20, et que des $\frac{2}{3}$ de cette somme l'on en retranche 12, donnera pour reste 10 ? *Rép.* 13.

PROB. 75. Quel est le nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$ et les $\frac{2}{7}$ ensemble font 73 ? *Rép.* 84.

PROB. 76. Quel est le nombre dont le $\frac{1}{3}$ surpasse sa $\frac{1}{5}$me partie de 72 ? *Rép.* 540.

PROB. 77. Il y a deux nombres dont la somme est 37 et si l'on retranche 3 fois le plus petit de 4 fois du plus grand, et qu'on divise cette différence par 6, le quotient sera 6. Quels sont ces nombres ? *Rép.* 21 et 16.

PROB. 78. Il y a deux nombres dont la somme est 49 ; et si le $\frac{1}{7}$me du plus petit est retranché du $\frac{1}{5}$me du plus grand, le reste sera 5. Quels sont ces nombres ? *Rép.* 35 et 41.

PROB. 79. Partagez le nombre 72 en trois parties, de manière que la $\frac{1}{2}$ de la *première* soit égale à la *seconde*, et que les $\frac{3}{5}$ de la seconde soient égaux à la troisième ? *Rép.* 40, 20 et 12.

Prob. 80. Une personne après avoir dépensé le $\frac{1}{5}$me de son revenu *plus* £10, il lui en restait la $\frac{1}{2}$ *plus* £35. Quel était son revenu ? *Rép.* £150.

Prob. 81. Un joueur à une *première partie* perdit le $\frac{1}{5}$ de son argent, et gagna ensuite 10*s*.; à une *seconde* il perdit le $\frac{1}{3}$ du reste, et gagna 3*s*.; après quoi il lui restait 3 guinées. Combien avait-il d'argent en se mettant au jeu ? *Rép.* £5.

Prob. 82. Partagez le nombre 90 en quatre parties, telles que la première *augmentée* de 2, la seconde *diminuée* de 2, la troisième *multipliée* par 2, et la quatrième *divisée* par 2, soient égales à la même quantité ?

Rép. 18, 22, 10, 40.

Prob. 83. Un marchand a deux sortes de thé, à 9*s*. 6*d*. et à 13*s*. 6*d*. la livre. Combien faudrait-il prendre de livres de chaque sorte pour faire une composition de 104 livres, qui vaudra £56 ?

Rép. 33 à 13*s*. 6*d*.
71 à 9*s*. 6*d*.

Prob. 84. Trois personnes, A, B, et C, peuvent moissonner un champ de blé séparément en 4, 8, et 12 jours respectivement. Dans combien de jours le moissonneront-elles collectivement ?

Soit x = Nombre de jours qu'il leur faudra pour moissonner le champ ; alors si l'on représente l'ouvrage par 1,

$\frac{1}{4}$ = la partie moissonnée par A dans 1 jour.
$\frac{1}{8}$ = " " " B " "
$\frac{1}{12}$ = " " " C " "
$\therefore \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ = " " " tous trois "

Mais la partie moissonnée par les trois dans un jour multiplié par le nombre de jours qu'il leur fallait pour moissonner le champ, est égale à l'ouvrage entier, ou 1 ;

$$\therefore \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{12}\right)x=1 :$$

Chassez les dénominateurs en multipliant par 24,

$$(6+3+2)x=24,$$
$$11x=24 ;$$
$$\therefore x=2\tfrac{2}{11} \text{ jours.}$$

PROB. 85. Un homme et sa femme mettent ordinairement 10 jours à boire un quart de cidre, mais lorsque le mari est absent, le quart dure 30 jours à la femme ; dans combien de jours l'homme seul boira-t-il le quart de cidre?

Rép. 15 jours.

PROB. 86. Une citerne a trois tuyaux, deux desquels la rempliraient dans 3 et 4 heures séparément, et le troisième la viderait dans 6 heures ; dans combien de temps la citerne serait-elle remplie si les trois tuyaux coulent à la fois? *Rép.* 2h. 24m.

PROB. 87. Une personne a acheté des oranges à $20d.$ la douzaine ; si elle eut eu 6 oranges de plus pour le même argent, elles lui auraient coûté $4d.$ de moins la douzaine. Combien en a-t-elle acheté ?

Soit x=le nombre d'oranges ;
alors $x+6=$ " " à $4d.$ de moins la douz.

Le prix des oranges dans le 1er cas$=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}d.$
et " " " 2me " $=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}d.$

$$\therefore \text{ le prix des oranges} = \frac{5x}{3}.$$

Mais nous avons aussi

$$\text{le prix des oranges} = \tfrac{4}{3}\,(x+6).$$

Nous avons donc obtenu deux valeurs indépendantes pour le *prix* des oranges ; ces valeurs doivent nécessairement s'égaler ;

$$\therefore \ \frac{5x}{3} = \tfrac{4}{3}\,(x+6).$$

Multipliant chaque membre de l'équation par 3,

$$5x = 4\,(x+6),$$
$$5x = 4x+24\,;$$
$$\therefore \ x = 24, \text{ le nombre d'oranges.}$$

PROB. 88. Une fruitière a acheté un certain nombre de pommes à deux pour un denier, et autant à trois pour un denier, et en les revendant ensuite à raison de cinq pour deux deniers, elle trouve qu'au lieu d'en retirer son argent comme elle s'y attendait, elle perd quatre deniers sur son marché. On demande combien elle a dépensé? *Rép.* 8*s*. 4*d*.

PROB. 89. Un homme peut ramer de Montréal à Varennes, une distance de 20 milles, et retourner, en 10 heures, le courant étant uniformément dans la même direction tout le temps ; il trouve qu'il peut ramer 2 milles contre le courant dans le même temps qu'il rame 3 milles avec le courant. Trouvez le temps de son allée et retour ?

Soit $3x=$ Nbre de milles qu'il fait par heure avec le courant
$\therefore 2x=$ " " " " " contre "

Or la distance divisée par les milles à l'heure donne le temps ;

$\therefore \frac{20}{3x}=$le nombre d'heures en descendant la rivière ;

et $\frac{20}{2x}=$ " " remontant "

Mais le temps de l'allée et retour est 10 heures ;

$$\therefore \frac{20}{3x}+\frac{20}{2x}=10.$$

Divisez par 10, $\frac{2}{3x}+\frac{1}{x}=1$.

En multipliant chaque membre de l'équation par $3x$,

$$2+3=3x;$$

$$\therefore x=\frac{5}{3}=1\tfrac{2}{3}.$$

et $\therefore 3x=5$, milles à l'heure en descendant.

$\therefore$ le temps en descendant$=\frac{20}{5}=4$ heures, et conséquemment le temps en remontant$=10-4=6$ heures.

PROB. 90. Une dame ayant acheté une ruche d'abeilles, trouva que le prix montait à 2*s*. de plus que les $\frac{3}{4}$ et le $\frac{1}{5}$ du prix. Déterminez ce prix. *Rép.* £2.

PROB. 91. Un lièvre, qui a cinquante sauts d'avance sur un lévrier, fait 4 sauts pendant que le lévrier n'en fait que 3 ; mais 2 sauts du lévrier valent 3 du lièvre. Combien le lévrier fera-t-il de sauts pour attraper le lièvre ?

Soit x le nombre de sauts fait par le lévrier;

alors $\frac{4x}{3}$ sera le nombre correspondant fait par le lièvre.

Soit 1 l'espace enjambée par le lièvre dans 1 saut;

alors $\frac{3}{2}$ " " " lévrier "

$\therefore \frac{4x}{3}+1$ ou $\frac{4x}{3}$ sera la distance entière parcourue par le lièvre avant qu'il soit pris ; et $x \times \frac{3}{2}$ ou $\frac{3x}{2}$ sera la distance parcourue dans le temps correspondant par le lévrier. Maintenant, par la donnée, la différence entre les distances parcourues par le lièvre et le lévrier respectivement est 50×1, ou 50 sauts ;

$$\therefore \frac{3x}{2}-\frac{4x}{3}=50.$$

$$9x-8x=300\,;$$

$$\therefore x=300 \text{ sauts.}$$

DE LA SOLUTION DES ÉQUATIONS SIMPLES, RENFERMANT DEUX OU PLUS DE QUANTITÉS INCONNUES.

51. Pour la solution des équations renfermant deux ou plus de quantités inconnues il faut qu'il y ait autant d'équations *indépendantes* qu'il y a de quantités *inconnues*. Les deux équations nécessaires pour la solution dans le cas où il y a deux quantités inconnues, peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'.$$

Ou a, b, c, a', b', c', représentent les quantités *connues*, et x, y, les quantités *inconnues* dont il faut trouver les valeurs en termes de ces quantités *connues*. Il y a trois méthodes différentes par lesquelles on peut déterminer la valeur de l'une des *inconnues*.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Trouvez la valeur de l'une des inconnues en termes de l'autre, et les quantités connues par les règles déjà données. Trouvez la valeur de la même inconnue de l'autre équation.

Egalant ces deux valeurs ; nous aurons alors une équation simple, ne renfermant qu'une seule inconnue, qui peut être résolue comme ci-devant.

$$\text{Ex. 1.}\quad \text{Soit}\ \left.\begin{array}{l} x+y=8\ldots.(1) \\ x-y=4\ldots.(2) \end{array}\right\}\ \text{trouvez } x \text{ et } y.$$

$$\begin{array}{ll} \text{De (1)} & y=8-x\ldots.(a) \\ \text{" (2)} & y=x-4 \end{array}$$

En égalant ces deux valeurs d'y, nous aurons

$$\begin{aligned} x-4&=8-x, \\ 2x&=12\,; \\ \therefore\ x&=6. \end{aligned}$$

Par (a) $y=8-x=8-6=2$.

$$\text{Ex. 2.}\quad \text{Soit}\ \begin{array}{l} x+4y=16\ldots.(1) \\ 4x+\ \ y=34\ldots.(2) \end{array}$$

De l'équation (1), nous avons $x=16-4y$.

" " (2), " " $x=\dfrac{34-y}{4}$,

$$\text{D'où par la règle, } \frac{34-y}{4}=16-4y,$$

$$\begin{aligned} 34-y&=64-16y, \\ 15y&=30\,; \\ \therefore\ y&=2. \end{aligned}$$

On a déjà vu que $x=16-4y=$(puisque $y=2$; et $\therefore 4y=8$) $16-8=8$.

$$\text{Ex. 3.}\quad \left.\begin{array}{l} 5x+3y=38 \\ 4x-\ \ y=10 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots Rép.\quad \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=6. \end{array}\right.$$

$$\text{Ex. 4.}\quad \left.\begin{array}{l} 2x-3y=-1 \\ 3x-2y=6 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots Rép.\quad \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=3. \end{array}\right.$$

Combien faut-il d'équations indépendantes pour la solution des équations contenant deux ou plus d'inconnues ? Dites la première méthode de solution ?

SECONDE MÉTHODE.

De l'une ou l'autre des équations il faut trouver la valeur de l'une ou des quantités inconnues, en termes de l'autre et des quantités connues, et pour la même quantité inconnue, substituer cette valeur dans l'autre équation qui dès lors ne renferme plus qu'une seule inconnue. Cette équation peut être résolue par les règles déjà données.

Ex. 1. $y-x=2 \ldots\ldots\ldots (1)$

$x+y=8 \ldots\ldots\ldots (2)$

De (1) $y=2+x. \quad (a)$

Cette valeur d'y étant substituée dans (2), donne

$$x+2+x=8,$$
$$2x=6\,;$$
$$\therefore\ x=3.$$

Et par (a) $y=2+x=2+3=5$.

Ex. 2. $\dfrac{x+2}{3}+8y=31 \qquad (1)$

$\dfrac{y+5}{4}+10x=192 \qquad (2)$

En chassant les dénominateurs de l'équation (1),

$x+2+24y=93$, ou $x+24y=91 \quad (a)$.

En chassant les dénominateurs de l'équation (2),

$y+5+40x=768$, ou $y+40x=763 \quad (b)$.

De (a) $x=91-24y$.

Substituez cette valeur de x, selon la règle dans l'équation (b) ; et

$$y+40(91-24y)=763,$$
ou, $y+3640-960y=763$;
$$\therefore\ 959y=3640-763=2877,$$
et $y=3$.

En renvoyant à l'équation (a) nous avons $x=91-24y=$(puisque $y=3$; et $\therefore\ 24y=72$) $91-72=19$.

Ex. 3. $\left.\begin{matrix}4x+3y=31\\3x+2y=22\end{matrix}\right\}$ ………… *Rép.* $\left\{\begin{matrix}x=4\\y=5.\end{matrix}\right.$

Comment résout-on les équations par la seconde méthode ?

TROISIÈME MÉTHODE.

Multipliez la première équation par le coefficient d'x dans la seconde équation, et multipliez ensuite la seconde équation par le coefficient de l'x dans la première ; soustrayez la *seconde* de ces équations résultantes de la *première*, et il ne restera plus que l'inconnue y et des quantités connues, desquelles on peut déterminer la valeur d'y.

Il est bon, cependant, d'observer, que si les termes, qui dans les équations *résultantes* sont les mêmes, ayant des signes dissemblables, il faut additionner les nouvelles équations, au lieu de les soustraire, afin d'éliminer x (c'est-à-dire de faire disparaître x des équations).

Ex. 1. Donnez $5x+4y=55\ldots.(1)$
$3x+2y=31\ldots.(2)$

Trouvez les valeurs d'x et y

Mult. (1) par 3, alors $15x+12y=165$
" (2) par 5, " $15x+10y=155$

$\therefore$ par la soustraction, nous avons $2y=10$
$\therefore\ y=5.$

Maintenant de l'équation (1) nous avons

$$x=\frac{55-4y}{5}$$
$$=\frac{55-20}{5}$$
$$=\frac{35}{5}$$
$$=7.$$

Ex. 2. Soient les équations suivantes à résoudre :

$ax+by=c\ldots.(1)$
$a'x+b'x=c'\ldots.(2)$

Mult. (1) par a', et $aa'x+a'by=a'c$
" (2) par a, et $aa'x+ab'y=ac'$;

$\therefore$ par la soustraction $(a'b-ab')y=a'c-ac'$

$$\therefore y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}.$$

Comment résout on les équations par la troisième méthode ?

8

Mult. (1) par b', et $ab'x+bb'y=b'c$
Mult. (2) par b, et $a'bx+bb'y=bc'$
Par la soustraction $(ab'-a'b)x=b'c-bc'$;

$$\therefore\ x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}.$$

Ex. 3. Soit

$$\begin{array}{rl} 3x+\ \ 4y=29 & (1) \\ 17x-\ \ 3y=36 & (2) \end{array}$$

Mult. (1) par 3, alors $9x+12y=87$
Mult. (2) par 4, alors $68x-12y=144$.

Les signes de $12y$ dans les deux équations étant dissemblables; donc pour éliminer y dans les deux dernières équations, il faut les additionner ensemble ; et alors

$$77x=231\ ;$$
$$\therefore\ \ x=3.$$

De (1) nous avons $4y=29-3x$,

$$\begin{aligned} &=29-9, \text{ (puisque } x=3\text{ ; et } \therefore\ 3x=9) \\ &=20\ ; \\ \therefore\ \ &y=5. \end{aligned}$$

Ex. 4. Soit $\left.\begin{array}{r} 6x+3y=33 \\ 13x-4y=19 \end{array}\right\}$ .... *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=5. \end{array}\right.$

Ex. 5. $\left.\begin{array}{r} 4x+3y=31 \\ 3x+2y=22 \end{array}\right\}$ .... *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=5. \end{array}\right.$

Ex. 6. $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=40 \\ 2x+3y=35 \end{array}\right\}$ .... *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=10. \\ y=5. \end{array}\right.$

Ex. 7. $\left.\begin{array}{r} 5x-4y=19 \\ 4x+2y=36 \end{array}\right\}$ .... *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=7 \\ y=4. \end{array}\right.$

Ex. 8. $\left.\begin{array}{r} 3x+7y=79 \\ 2y-\frac{1}{2}x=\ \ 9 \end{array}\right\}$ .... *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=10 \\ y=7. \end{array}\right.$

Ex. 9. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+y}{3}+1=6 \\[2ex] \dfrac{x-y}{7}+3=4 \end{array}\right\}$ .... *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=11 \\[2ex] y=4. \end{array}\right.$

Ex. 10. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+y}{3}-2y=2 \\[2ex] \dfrac{2x-4y}{5}+y=\dfrac{23}{5} \end{array}\right\}$ ...... *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=11 \\[2ex] y=1. \end{array}\right.$

Ex. 11. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x-3}{2}+y=7 \\[2ex] 5x-13y=\dfrac{67}{2} \end{array}\right\}$ ...... *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Ex. 12. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x-7y}{3}=\dfrac{2x+y+1}{5} \\[2ex] 8-\dfrac{x-y}{5}=6 \end{array}\right\}$ .... . *Rép.* $\left\{\begin{array}{l} x=13 \\ y=3. \end{array}\right.$

52. Quand il s'agit de trois quantités inconnues, la forme la plus générale pour représenter des équations de cette nature est

$$ax+by+cz=d \qquad (1)$$
$$a'x+b'y+c'z=d' \qquad (2)$$
$$a''x+b''y+c''z=d'' \qquad (3),$$

et l'on peut résoudre ces équations de la manière suivante :

Ex. 1. Soit $\left.\begin{array}{ll} 2x+3y+4z=29 & (1) \\ 3x+2y+5z=32 & (2) \\ 4x+3y+2z=25 & (3) \end{array}\right\}$ trouvez les valeurs d'x, y, z.

I. Multipliez (1) par 3, alors $6x+9y+12z=87$ (4)
" (2) par 2, alors $6x+4y+10z=64$ (5).

Soustrayez (5) de (4) alors $5y+2z=23$ (6)

Multipliez (2) par 4, alors $12x+8y+20z=128$
" (3) par 3, alors $12x+9y+6z=75$

Soustrayez.......... $-y+14z=53$ (7).

II. D'où les équations proposées sont réduites à,

$$5y+2z=23 \quad (6)$$
$$-y+14z=53 \quad (7).$$

Encore...... $5y+2z=23$
Mult. (7) par 5, alors $-5y+70z=265$

Par l'*addition*........ $72z=288$, ou $x\tfrac{288}{72}=4$
De l'équation (7)........$y=14x-53=56-53=3$.

III. De l'équation (1)....$x=\dfrac{29-3y-4z}{2}=\dfrac{29-25}{2}=2$.

Ex. 2. $\left.\begin{array}{r} x+y+x=90 \\ 2x+40=3y+20 \\ 2x+40=4z+10 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots Rép. \left\{\begin{array}{l} x=35 \\ y=30 \\ z=25. \end{array}\right.$

Ex. 3. $\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=\ 53 \\ x+2y+3z=105 \\ x+3y+4z=134 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots Rép. \left\{\begin{array}{l} x=24 \\ y=\ 6 \\ z=23. \end{array}\right.$

PROBLÈMES.

Prob. 92. Il y a deux nombres tels, que si l'on additionne 3 fois le plus grand à $\frac{1}{3}$ du plus petit, la somme sera 36 ; et si de 6 fois le plus petit on soustrait 2 fois le plus grand, et que l'on divise le reste par 8, le quotient sera 4. Quels sont ces nombres?

Soit x=le grand nombre,
y=le petit "

Alors $\left.\begin{array}{r} 3x+\frac{y}{3}=36 \\ \frac{6y-2x}{8}=\ 4 \end{array}\right\}$ ou $\begin{array}{r} 9x+\ y=108 \\ 6y-2x=\ 32 ; \end{array}$

Ou, $y+9x=108$ (1)
$6y-2x=\ 32$ (2)

Mult. l'équation(1) par 6, alors $6y+54x=648$
Soustrayez " (2) " $6y-\ 2x=\ 32$;
" $56x=616$;

$$\therefore\ x=\frac{616}{56}=11.$$

De l'équation (1) $y=108-9x=108-99=9.$

Prob. 93. J'ai une certaine fraction telle que si j'ajoute 3 à son numérateur, sa valeur sera $\frac{1}{3}$; et si je soustrais 1 de son dénominateur, sa valeur sera $\frac{1}{5}$. Quelle est cette fraction?

Soit $\left.\begin{array}{l} x=\text{son numérateur,} \\ y=\ \text{dénominateur,} \end{array}\right\}$ alors la fraction est $\frac{x}{y}$.

Addition. 3 au numér. alors, $\frac{x+3}{y}=\frac{1}{3}$
Soustrayez 1 du dénomat. et $\frac{x}{y-1}=\frac{1}{5}$ $\Bigg\}$ ou, $\begin{array}{r} 3x+9=y \\ 5x=y-1. \end{array}$

Par *transposition*, $y-3x=9$ (1)
$y-5x=1$ (2).

Soustrayez l'équation (2) de (1), et vous aurez

$2x=8$;

$\therefore\ x=\frac{8}{2}=4$, le numérateur.

De l'équation (1) $y=9+3x=9+12=21$, le dénominat[r].

D'où nous avons pour la fraction demandée $\frac{4}{21}$.

PROB. 94. A et B ont deux sommes d'argent ; A dit à B, donne-moi £15 de ton argent et j'aurai 5 fois autant qu'il t'en restera ; B dit à A, donne-moi £5 de ton argent, et j'aurai tout juste autant qu'il t'en restera. Quelle somme avaient-ils chacun ?

Soit x=l'argent de A, y=l'argent de B; alors $x+15=$ ce qu'aurait A après avoir reçu £15 de B.

$y-15$=ce qui resterait à B.

Encore $y+5=$ ce qu'aurait B après avoir reçu £5 de A.

$x-5$=ce qui resterait à A.

D'où par la donnée, $x+15=5\times(y-15)=5y-75$
et $y+5=x-5$.

Par transposition, $5y-x=90$ (1),
et $y-x=-10$ (2).

Ecrivez l'équation (1) $5y-x=90$.
Mult. éq[n]. (2) par 5, $5y-5x=-50$.

Soustrayez (2) de (1) $4x=140$;

$\therefore\ x=\frac{140}{4}=35$, l'argent de A.

De l'équation (1) $5y=90+35=125$;

$\therefore\ y=\frac{125}{5}=25$, l'argent de B.

PROB. 95. Quels sont les deux nombres dont $\frac{1}{3}$ de la somme plus 13 donne 17 pour résultat, et la $\frac{1}{2}$ de leur différence moins 1 donne 2 pour reste ?

Rép. 9, et 3.

PROB. 96. Il y a une fraction telle, que si l'on ajoute 1 à son numérateur, elle devient $\frac{1}{3}$; et si l'on ajoute 3 à son dénominateur, elle devient $\frac{1}{3}$. Quelle est cette fraction? *Rép.* $\frac{5}{12}$.

PROB. 97. Une personne voulant soulager un certain nombre de pauvres en leur donnant 2*s.* 6*d.* chaque, mais elle s'apperçut qu'il lui manquerait 3*s.*; elle leur donna que 2*s.* à chaque et il lui en restait 4. Combien avait-elle d'argent, et combien de pauvres a-t-elle soulagés?

Soit x=son argent (en chelins);
y=nombre de pauvres.

Alors $2\frac{1}{2}\times y$, ou $\frac{5y}{2}=$ $\left\{\begin{array}{l}\text{N}^{\text{bre}}\text{.de chels.qui auraient}\\ \text{été donnés à 2}s\text{.6}d\text{. chaq.}\end{array}\right.$

et $2\times y$, ou $2y=$ " " à 2*s.* chaque.

D'où par la donnée $\frac{5y}{2}=x+3$ (1)

et $2y=x-4$ (2).

Soust^z. (2) de (1), alors $\frac{y}{2}=7$, ou $y=14$, n^e. de pauvres.

De l'équation (2), $x=2y+4=28+4=32s.$ son argent.

PROB. 98. Un homme a deux chevaux, et une selle de la valeur de £10 ; si l'on place la selle sur le *premier* cheval, sa valeur devient *double* de celle du *second;* mais si l'on met la selle sur le *second* cheval, il s'en faut de £13 que sa valeur égale celle du *premier*. Que vaut chaque cheval? *Rép.* 56, et 33.

PROB. 99. Il y a un certain nombre de deux chiffres. La somme de ces chiffres est 5; et si on ajoute 9 au nombre lui-même, les chiffres seront renversés. Quel est ce nombre?

Remarquons ici que tout nombre de deux chiffres est égal à 10 fois le chiffre des dizaines plus le chiffre des unités: ainsi, $34=10\times 3+4$.

Soit x=le chiffre des dizaines,
y=le chiffre des unités.
Alors $10x+y$=le nombre lui-même,
et $10y+x$=le nombre *renversé*.

D'où, par la donnée, $x+y=5$ (1),
et $10x+y+9=10y+x$, ou $9x-9y=-9$, ou $x-y=-1$ (2)
Soustrayez (2) de (1), alors $2y=6$, et $y=3$,
$x=5-3=2$;
$\therefore$ le nombre est $(10x+y)=23$.

Additionnez 9 à ce nombre, et il devient 32, qui est le nombre avec ses *chiffres renversés*.

PROB. 100. Il y a deux nombres, tels, que $\frac{1}{2}$ du plus grand additionné à $\frac{1}{3}$ du plus petit est égal à 13 ; et si $\frac{1}{2}$ du plus petit est soustraite du $\frac{1}{3}$ du plus grand, le reste est zéro. Quels sont ces nombres? *Rép.* 18 et 12.

PROB. 101. Il y a un certain nombre, à la somme des chiffres duquel si vous ajoutez 7, le résultat sera trois fois le chiffre des dizaines ; et si au nombre lui-même vous soustrayez 18, les chiffres seront *renversés*. Quel est ce nombre? *Rép.* 53.

PROB. 102. Un marchand a deux sortes de thé, l'une valant 9*s*. 6*d*. la livre et l'autre 13*s*. 6*d*. Combien lui faut-il prendre de livres de chaque sorte pour faire un mélange de 104*lbs*. qui vaudra £56 ?

Rép. 33 à 13*s*. 6*d*.
71 à 9*s*. 6*d*.

PROB. 103. Un vaisseau contenant 120 gallons est rempli en 10 minutes par deux conduits coulant *successivement ;* l'un donne 14 gallons par minute et l'autre 9 gallons. Pendant combien de temps *chaque* conduit a-t-il coulé ?

Rép. le conduit de 14 gallons coule pendant 6 minutes.
celui de 9 " " " 4 "

PROB. 104. Trouvez trois nombres tels, que le *premier* avec $\frac{1}{2}$ de la somme du *second* et du *troisième* sera 120 ; le *second* avec $\frac{1}{5}$ de la différence entre le *troisième* et le *premier* sera 70 ; et $\frac{1}{2}$ de la somme des trois nombres sera 95. *Rép.* 50, 65, 75.

CHAPITRE IV.

PUISSANCES ET RACINES.

PUISSANCES DES NOMBRES ET DES MONOMES.

53. On obtient une *puissance* quelconque d'une quantité par la multiplication de cette quantité par elle-même jusqu'à ce que le nombre de ses facteurs égale le nombre d'unités de l'indice de la puissance donnée: Ainsi, le carré de $a = a \times a = a^2$; le cube de $b = b \times b \times b = b^3$; la quatrième puissance de $2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$; la cinquième puissance de $3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$, etc.

54. L'opération s'effectue de la même manière pour les monomes, si ce n'est que dans ce cas il faut observer, que les puissances des quantités *négatives* sont tour-à-tour + et — ; les puissances *pairs* étant *positives* et les puissances *impairs négatives*.

Ainsi le *carré* de $+2a$ est $+2a \times +2a$ ou $+4a^2$; le carré de $-2a$ est $-2a \times -2a$ ou $\times 4a^2$; mais le cube de $-2a = -2a \times -2a \times -2a = +4a^2 \times -2a = -8a^3$.

Les diverses puissances de $\frac{a}{b}$ sont,

carré $= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$,

cube $= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$,

4ème puissance $= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4}$,

etc. = etc.

Et les diverses puissances de $-\frac{b}{2c}$,

carré $= -\frac{b}{2c} \times -\frac{b}{2c} = +\frac{b^2}{4c^2}$,

cube $= -\frac{b}{2c} \times -\frac{b}{2c} \times -\frac{b}{2c} = -\frac{b^3}{8c^3}$,

4ème puissance $= -\frac{b}{2c} \times -\frac{b}{2c} \times -\frac{b}{2c} \times -\frac{b}{2c} = +\frac{b^4}{16c^4}$, etc. = etc.

CARRÉ DES POLYNOMES.

55. On obtient les puissances des polynomes par la

simple application de la règle de la multiplication complexe (Art. 34). Ainsi,

Ex. 1. Quel est le carré de $a+2b$?

$$\begin{array}{rl}
 & a+2b \\
 & a+2b \\
\hline
 & a^2+2ab \\
 & \quad +2ab+4b^2 \\
\hline
\text{Le carré} = & a^2+4ab+4b^2 \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ex. 2. Quel est le cube de a^2-x?

$$\begin{array}{rl}
 & a^2-x \\
 & a^2-x \\
\hline
 & a^4-a^2x \\
 & \quad -a^2x+x^2 \\
\hline
\text{Le carré} = & a^4-2a^2x+x^2 \\
 & a^2-x \\
\hline
 & a^6-2a^4x+a^2x^2 \\
 & \quad -a^4x+2a^2x^2-x^3 \\
\hline
\text{Le cube} = & a^6-3a^4x+3a^2x^2-x \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ex. 3.

Quelle est la 5me puissance de $a+b$?

$$\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
a^2+ab \\
\quad +ab+b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2 = \text{le Carré} \\
a+b \\
\hline
a^3+2a^2b+ab^2 \\
\quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = \text{le Cube} \\
a+b \\
\hline
a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\
\quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
\hline
a^4+4a^3b^2+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = \text{la 4me Puissance} \\
a+b \\
\hline
a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4 \\
\quad +a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5 \\
\hline
a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 = \text{la 5me Puissance.} \\
\hline\hline
\end{array}$$

Ex. 4. La 4me puissance de $a+3b$ est $a^4+12a^3b+54a^2b^2+108ab^3+81b^4$.

Ex. 5. Le carré de $3x^2+2x+5$ est $9x^4+12x^3+34x^2+20x+25$.

Ex. 6. Le cube de $3x-5$ est $27x^3-135x^2+225x-125$.

Ex. 7. Le cube de x^2-2x+1 est $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$.

Ex. 8. Le carré de $a+b+c$ est $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$.

DES RACINES DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

56. La règle pour l'extraction des racines des quantités algébriques, n'est autre que l'inverse de celle que nous avons déjà indiquée pour la formation des puissances. Quant au procédé à suivre, il faut voir quelle est la quantité qui étant multipliée successivement par elle-même, jusqu'à ce que ses facteurs égalent en nombre les unités de l'indice de la racine donnée, produise la la quantité dont on cherche la racine. Ainsi,

(1.) $49=7\times 7$; $\therefore$ la racine carrée de 49 (ou par Défn. 15, $\sqrt{49})=7$.

(2.) $-b^3=-b\times -b\times -b$; $\therefore$ la racine cubique de $-b^3$ $(\sqrt{-b})=-b$.

(3.) $\dfrac{16a^4}{81b^4}=\dfrac{2a}{3b}\times\dfrac{2a}{3b}\times\dfrac{2a}{3b}\times\dfrac{2a}{3b}$; $\therefore \sqrt[4]{\dfrac{16a^4}{81b^4}}=\dfrac{2a}{3b}$,

(4.) $32=2\times 2\times 2\times 2\times 2$; $\therefore \sqrt[5]{32}=2$,

(5.) $a^6=a^2\times a^2\times a^2$; $\therefore \sqrt[3]{a^6}=a^2$.

D'où l'on peut inférer, qu'une racine quelconque d'un monome peut être extraite, en divisant son indice, s'il est possible, par l'indice de la racine.

57. Si l'on ne peut pas décomposer la quantité sans le radical en un nombre de facteurs indiqués par ce signe, ou, autrement, si la quantité n'est pas une *puissance complète*, alors, on ne peut pas en extraire une racine exacte, et la quantité jointe au radical, est appelée

---

Qu'entend-on par racines? Quelle est la règle pour l'extraction des racines? Qu'est-ce qu'une quantité sourde?

sourde. Ainsi $\sqrt{37}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{b^3}$, $\sqrt[6]{47}$, etc., etc., sont des quantités sourdes.

58. Dans les puissances des quantités négatives, nous avons remarqué que les puissances paires étaient $+$ et les puissances impaires $-$; il n'y a conséquemment aucune quantité qui, étant multipliée par elle-même de telle sorte que le nombre de ses facteurs soit *pairs*, qui puisse donner une quantité négative. Ainsi les quantités de la forme $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-10}$, $\sqrt[6]{-a^3}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, etc., etc., n'ont pas de racine réelle, et ainsi elles sont dites *impossibles*.

59. Dans l'extraction des racines des polynomes, il faut observer dans quel ordre on peut avoir les extraits de la racine, de ceux de la puissance. Par exemple, (par Art. 55, Ex. 3.), le carré de $a+b$ est $a^2+2ab+b^2$, où les termes sont co-ordonnés selon les puissances de a. En comparant $a+b$ à $a^2+2ab+b^2$, on voit que le premier terme de la puissance (a^2) est le carré du premier terme de la racine $(a.)$ Il faut donc écrire a pour le premier terme de la racine ; carrez-le, et le soustrayez du premier terme de la puissance. Abaissez les deux autres termes $2ab+b^2$, et *doublez* le premier terme de la racine ; écrivez $2a$, et voyez combien il est contenu de fois dans le premier terme du reste $(2ab)$, il y est contenu b fois, l'autre terme de la racine ; et puisque $2ab+b^2=(2a+b)\,b$, si à $2a$ on ajoute le terme b, et que l'on multiplie cette somme par b, le résultat est $2ab+b^2$; lequel étant soustrait des deux termes abaissés, donne un reste nul.

$$\begin{array}{r|l}
 & a^2+2ab+b^2 \;(\;a+b \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b & 2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\
\hline
 & * \quad *
\end{array}$$

60. Encore, le carré de $a+b+c$ (Art. 55, Ex. 8.), est $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$; dans ce cas on peut extraire la racine de la puissance, en continuant le procédé suivi dans le dernier article. Ainsi ayant trouvé les deux premiers termes $(a+b)$ de la racine comme ci-devant, on

Expliquez la nature d'une quantité impossible ? Comment faut-il faire pour extraire les racines des polynomes ?

abaisse les trois termes qui restent $2ac+2bc+c^2$ de la puissance, et divisant $2ac$ par $2a$ on a c, le troisième terme de la racine. Ensuite, doublez le dernier terme(b) du diviseur précédent, et ajoutez-y c, nous avons donc $2a+2b+c$; multipliez ce nouveau diviseur par c, et il devient $2ac+2bc+c^2$, lequel étant soustrait des trois derniers termes abaissés, donne un reste nul. C'est ainsi que l'on résout les Exemples suivants.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\big(a+b+c \\
 & a^2 \\
2a+b & 2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\
2a+2b+c & 2ac+2bc+c^2 \\
 & 2ac+2bc-c^2 \\
 & * \quad * \quad *
\end{array}
$$

Ex. 1.

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^4+6x^3+\frac{89}{4}x^2+15x+25\Big(2x^2+\frac{3}{2}x+5. \\
 & 4x^4 \\
4x^2+\frac{3}{2}x\Big) & 6x^3+\frac{89}{4}x^2 \\
 & 6x^3+\frac{9}{4}x^2 \\
4x^2+3x+5\Big) & 20x^2+15x+25 \\
 & 20x^2+15x+25 \\
 & * \quad * \quad *
\end{array}
$$

Ex. 2.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^6+4x^5+2x^4+9x^2-4x+4(x^3+2x^2-x+2 \\
 & x^6 \\
2x^3+2x^2) & 4x^5+2x^4 \\
 & 4x^5+4x^4 \\
2x^3+4x^2-x) & -2x^4+9x^2-4x \\
 & -2x^4-4x^3+\ x^2 \\
2x^3+4x^2-2x+2) & +4x^3+8x^2-4x+4 \\
 & +4x^3+8x^2-4x+4 \\
 & * \quad * \quad * \quad *
\end{array}
$$

Ex. 3. La racine carrée de $4x^2+4xy+y^2$ est $2x+y$.

Ex. 4. La racine carrée de $25a^2+30ab+9b^2$ est $5a+3b$.

Ex. 5. Trouvez la racine carrée de $9x^4+12x^3+22x^2+12x+9$. *Rép.* $3x^2+2x+3$.

Ex. 6. Extrayez la racine carrée de $4x^4-16x^3+24x^2-16x+4$. *Rép.* $2x^2-4x+2$.

Ex. 7. Trouvez la racine carrée de $36x^4-36x^3+17x^2-4x+\frac{4}{9}$. *Rép.* $6x^2-3x+\frac{2}{3}$.

Ex. 8. Extrayez la racine carrée de $x^4+8x^2+24+\frac{32}{x^2}+\frac{16}{x^4}$. *Rép.* $x^2+4+\frac{4}{x^2}$.

EXAMEN DU PROCÉDÉ POUR L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE DES NOMBRES.

Avant de procéder à l'examen de cette règle il est nécessaire d'expliquer la nature de la notation arithmétique.

61. L'on sait bien que la valeur des chiffres dans l'échelle de la notation arithmétique croit dans une décuple proportion de la droite à gauche ; un nombre peut donc être exprimé par l'addition des *unités*, *dizaines*, *centaines*, etc., qui le compose. Ainsi le nombre 4371 peut être exprimé de la manière suivante, savoir, $4000+300+70+1$, ou par $4\times 1000+3\times 100+7\times 10+1$; d'où il suit, que si l'on représente les chiffres significatifs,* d'un nombre par a, b, c, d, e, etc., commençant à gauche, alors,

Un nombre de 2 chiffres	peut être représenté par	$10a+b$
" 3 chiffres	par	$100a+10b+c$.
" 4 chiffres	par	$1000a+100b+10c+d$.
etc.	etc.	etc.

* Par chiffres significatifs d'un nombre on entend les chiffres qui le compose, considérés indépendemment de la valeur qu'on leur donne dans l'échelle arithmétique. Ainsi les chiffres significatifs du nombre 537 sont simplement les nombres 5, 3, et 7 ; au lieu que 5, considéré par rapport à sa place dans l'échelle de la numération, signifie 500 et le 3 signifie 30.

Expliquez l'échelle de notation arithmétique ? Qu'est-ce qu'un chiffre significatif ?

62. Soit un nombre de trois chiffres (savoir, $100a+10b+c$) à carrer, et que l'on en extrait la racine selon la règle, Art. 60, et nous aurons l'opération de la manière suivante ;

I. $10{,}000a^2+2{,}000ab+100b^2+200ac+20bc+c^2\,(100a+10b+c.$

$$
\begin{array}{l}
10{,}000a^2 \\
\hline
200a+10b)2{,}000ab+1{,}00b^2 \\
\qquad\qquad 2{,}000ab+1{,}00b^2 \\
\qquad\qquad \overline{200a+20b+c)200ac+20bc+c^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 200ac+20bc+c^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{\ast \quad \ast \quad \ast}
\end{array}
$$

II. Soit $\left.\begin{array}{l}a=2\\b=3\\c=1\end{array}\right\}$ et l'opération se trouve transformée en la suivante ;

$$
\begin{array}{l}
40{,}000+12{,}000+900+400+60+1(200+30+1 \\
40{,}000 \\
\hline
400+30)12{,}000+900+400 \\
\qquad\qquad 12{,}000+900 \\
\qquad\qquad \overline{400+60+1)400+60+1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 400+60+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\ast \quad \ast \quad \ast}
\end{array}
$$

III. Mais il est évident que l'on ne changerait pas l'opération en rassemblant les divers nombres qui sont dans une même ligne, et à en faire la somme en laissant de côté les zéros qui doivent être *soustraits* dans le cours de l'opération. Soit ainsi fait ; et que l'on abaisse deux chiffres à la fois, après que l'on a soustrait le carré du premier chiffre de la racine ; on peut représenter l'opération de la manière suivante d'où il parait que la racine carrée de 53,361 est 231.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \dot{5}3\dot{3}6\dot{1}\,(231 \\
 & 4 \\
\hline
43 & 133 \\
 & 129 \\
\hline
461 & 461 \\
 & 461 \\
\hline
 & \ast
\end{array}
$$

Démontrez la relation entre la méthode algébrique et la méthode numérique d'extraire la racine carrée et qu'ils sont identiques ?

63. Pour expliquer la division du nombre donné en *tranches* de deux chiffres, par un point sur chaque second chiffre commençant par les unités (comme dans l'opération précédente,) il faut remarquer, que, puisque la racine carrée de 100 est 10; de 10,000 est 100; de 1,000,000 est 1,000, etc., etc.; il s'en suit que la racine carrée d'un nombre *moindre que* 100 ne peut être que d'un *seul* chiffre; d'un nombre *entre* 100 *et* 10,000 de *deux* chiffres; d'un nombre *entre* 10,000 *et* 1,000,000, de *trois* chiffres, etc., etc.; et que conséquemment le nombre de ces points indiquera le nombre de chiffres contenus dans la racine carrée du nombre donné. Ainsi on voit que la racine carrée de 53,361 est un nombre de *trois* chiffres.

Ex. 1. Trouvez la racine carrée de 105,625. *Rép.* 325.

Ex. 2. " " " 173,056. *Rép.* 416.

Ex. 3. " " " 5,934,096. *Rép.* 2436.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

64. On divise les équations du second degré en *pures* et *affectées*. Les équations du second degré *pures* sont celles qui ne renferment que le *carré* de l'inconnue, telle que $x^2=36$; $x^2+5=54$; $ax^2-b=c$; etc. Les équations du second degré *affectées* sont celles qui renferment outre le carré, la première puissance de l'inconnue, telle que $x^2+4x=45$; $3x^2-2x=21$; $ax^2+2bx=c+d$; etc. etc.

DES ÉQUATIONS PURES DU SECOND DEGRÉ.

65. La Règle pour la solution des équations *pures* du second degré est celle-ci. " Transposez les termes de

Expliquez le principe de la règle et l'objet de la séparation du nombre dont on veut extraire la racine carrée, en tranches de deux chiffres? Comment divise-t-on les équations du second degré? Qu'est-ce qu'une équation du second degré *affectée?* Enoncez la règle pour la solution des équations pures du second degré?

l'équation de manière à amener ceux qui contiennent x^2 dans un membre de l'équation, et les *quantités connues* dans l'autre ; divisez (s'il est nécessaire) par le coefficient de x^2 ; arrivé là, tirez pour équation finale la racine carrée des deux membres.

Ex. 1.

Soit $x^2+5=54$.

Par transposition $x^2=54-5=49$.

Extrayez la racine carrée des deux membres de l'équation. } alors $x=\pm\sqrt{49}=\pm 7$.

Ex. 2.

Soit $3x^2-4=71$.

Par transposition, $3x^2=71+4=75$.

Divisez par 3, $x^2=\frac{75}{3}=25$.

Extrayez la racine carrée, $x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$.

Ex. 3.

Soit $ax^2-b=c$;

alors $ax^2=c+b$,

et $x^2=\frac{c+b^2}{a}$

$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{c+b}{a}}$.

Ex. 4. $5x^2-1 \quad =244$..... *Rép.* $x=\pm 7$.

Ex. 5. $9x^2+9 \quad =3x^2+63$.. *Rép.* $x=\pm 3$.

Ex. 6. $\frac{4x^2+5}{9} \quad =45$........*Rép.* $x=\pm 10$.

Ex. 7. $bx^2+c+3=2bx^2+1$...*Rép.* $x=\pm\sqrt{\frac{c+2}{b}}$.

DE LA SOLUTION DES ÉQUATIONS AFFECTÉES DU SECOND DEGRÉ.

66. La forme la plus générale que l'on puisse donner à une équation du second degré *affectée* est celle-ci $ax^2+bx=c$; où a, b, c peuvent être des quantités quelconques, *positives* ou *négatives, intégralles* ou *fractionnaires*. Divisez chaque membre de cette équation par a, alors $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$. Soit $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$; alors cette équation est réduite à la forme $x^2+px=q$, où p et q peuvent être des quantités quelconques, positives ou négatives, intégralles ou fractionnaires.

67. De ces deux formes sous lesquelles on peut représenter les équations du second degré *affectées*, on déduit deux Règles pour leur solution.

PREMIÈRE RÈGLE.

Soit $x^2\pm px=q$.

Ajoutez $\frac{p^2}{4}$ à chaque membre de l'équation, alors
$$x^2\pm px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}+q=\frac{p^2+4q}{4}.$$

Extrayez-la racine carrée de chaque membre de l'équation, alors
$$x\pm\frac{p}{2}=\frac{\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}\text{*}$$
$$\text{et } x=\frac{\pm\sqrt{p^2+4q}\mp p}{2}.$$

D'où l'on voit, que "si on ajoute à chaque membre de l'équation le *carré de la moitié du coefficient de x*, on a pour premier membre de l'équation, une quantité qui est

*Puisque le carré de $+a$ est $+a^2$, et que celui de $-a$ est aussi $+a^2$, la racine carrée $+a^2$ peut être ou $+a$ ou $-a$; donc la racine carrée de p^2+4q peut être exprimée par $\pm\sqrt{p^2+4q}$.

Quelle est la forme la plus générale sous laquelle on peut représenter une équation du second degré affectée ? Peut-on la réduire à une autre forme ? Enoncez la 1ère Règle.

un ***carré parfait;*** et en extrayant la racine carrée de chaque membre de l'équation résultante, on a une équation ***simple,*** de laquelle on détermine la valeur de x."

68. D'après la forme que l'on donne à x dans chacune de ces Règles, il est évident qu'il aura *deux* valeurs; l'une correspondant au signe $+$, et l'autre au signe $-$, du radical.

Ex. 1.

Soit $x^2+8x=65$.

Ajoutez le carré de 4 (c.-à-d. 16) à chaque membre de l'équation, alors $x^2+8x+16=65+16=81$.

Extrayez la racine carrée de chaque membre de l'équation, alors

$$x+4=\pm\sqrt{81}=\pm 9,$$
$$\text{et } x=9-4=5;$$
$$\text{ou } x=-9-4=-13.$$

Ex. 2.

Soit $x^2-4x=45$.

Ajoutez le carré de 2 (c.-à-d. 4), alors $\Big\}$ $x^2-4x+4=45+4=49$.

Extrayez la racine carrée, et $x-2=\pm\sqrt{49}=\pm 7$,

$$\text{et } x=7+2=9;$$
$$\text{ou } x=2-7=-5.$$

Ex. 3. $x^2+12x=108$............*Rép.* $x=6$ ou -18.

Ex. 4. $x^2-14x=51$............*Rép.* $x=17$ ou -3.

Ex. 5. $x^2-6x=40$............*Rép.* $x=10$ ou -4.

Ex. 6. $x^2-5x=6$.

Dans cet exemple le *coefficient* de x est 5, un nombre impair. Sa demi est $\frac{5}{2}$; et $\therefore$ additionnant à chaque membre de l'équation $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ ou $\frac{25}{4}$, nous aurons

$$x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=6+\frac{25}{4}=\frac{24+25}{4}=\frac{49}{4}.$$

Extray[z] la racine carrée, $x-\frac{5}{2}=\pm\frac{7}{2}$;

$$\therefore x=\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}=6, \text{ ou } -1.$$

Ex. 7. $x^2-x=6$.

Ici le coefficient de x est 1 ; additionnant donc $(\frac{1}{2})^2$ ou $\frac{1}{4}$ à chaque membre, nous avons

$$x^2-x+(\tfrac{1}{2})^2=6+\tfrac{1}{4}=\frac{25}{4}.$$

Extrayant la racine carrée, $x-\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2}$;

$$\therefore x=\tfrac{1}{2}\pm\frac{5}{2}=3 \text{ ou } -2.$$

Ex. 8. $x^2+7x=78$.............*Rép.* $x=6$ ou -13.
Ex. 9. $x^2+3x=28$.............*Rép.* $x=4$ ou -7.
Ex. 10. $x^2-3x=40$.............*Rép.* $x=8$ ou -5.
Ex. 11. $x^2+x=30$.............*Rép.* $x=5$ ou -6.

Ex. 12. Soit $7x^2-20x=32$; trouvez x.

Divisant par 7, $x^2-\frac{20}{7}x=\frac{32}{7}$.

Comp[t]. le carré. $\Big\}$ $x^2-\frac{20}{7}x+\left(\frac{10}{7}\right)^2=\frac{32}{7}+\frac{100}{49}=\frac{224}{49}+\frac{100}{49}=\frac{324}{49}$.

$$\text{D'où } x-\frac{10}{7}=\pm\sqrt{\frac{324}{49}}=\pm\frac{18}{7};$$

$$\text{et } x=\frac{10}{7}\pm\frac{18}{7}=4 \text{ ou } -1\tfrac{1}{7}.$$

Ex. 13. $5x^2+4x=273$.

$$\text{Divisant par 5, } x^2+\frac{4}{5}x=\frac{273}{5}.$$

Ajoutez à chaq. côté. $\Big\}$ $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ ou $\frac{4}{25}$ et $x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}=\frac{273}{5}+\frac{4}{25}=\frac{1369}{25}$.

$$\text{Extrayez la racine carrée, } x+\frac{2}{5}=\pm\frac{37}{5}.$$

$$\therefore x=\pm\frac{37}{5}-\frac{2}{5}=7, \text{ ou } -7\tfrac{4}{5}.$$

Ex. 14. $3x^2+2x=161$........*Rép.* $x=7$ ou $-7\frac{2}{3}$.
Ex. 15. $2x^2-5x=117$........*Rép.* $x=9$ ou $-\frac{13}{2}$.
Ex. 16. $3x^2-2x=280$........*Rép.* $x=10$ ou $-9\frac{1}{3}$.
Ex. 17. $4x^2-7x=492$........*Rép.* $x=12$ ou $-10\frac{1}{4}$.

Comme on a rarement une équation du second degré dans une forme aussi simple que dans les exemples précédents ; on trouve qu'il est généralement nécessaire d'employer les réductions suivantes dans la solution du second degré.

(1.) Chassez les dénominateurs.

(2.) Transposez les termes affectés de x^2 et x dans le premier membre de l'équation, et les nombres dans l'autre.

(3.) Divisez tous les termes de l'équation par le *coefficient* de x.

(4.) Complétez le carré.

(5.) Extrayez la racine carrée de chaque membre de l'équation, et il en résultera une équation simple, de laquelle on peut déterminer la valeur de x.

Ex. 1. $$\frac{4x^2}{3}-11=\frac{1}{3}x.$$

Multipliez par 3, et $4x^2-33=x$.
Transposez $4x^2-x=33$.

Divisez par 4, et $x^2-\frac{1}{4}x=\frac{33}{4}$.

Complétez le carré. $x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}=\frac{33}{4}+\frac{1}{64}=\frac{528}{64}+\frac{1}{64}=\frac{529}{64}$.

Extr^z. la racine carrée $x-\frac{1}{8}=\pm\frac{23}{8}$.

$$\therefore x=\frac{1}{8}\pm\frac{23}{8}=3 \text{ ou } -2\tfrac{3}{4}.$$

Ex. 2. $$\frac{9}{x+1}+\frac{4}{x}=5.$$

$$9+\frac{4x+4}{x}=5x+5.$$

$$9x+4x+4=5x^2+5x,$$
$$5x^2-8x=4,$$
$$x^2-\frac{8}{5}x=\frac{4}{5},$$
$$x^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{25}=\frac{4}{5}+\frac{16}{25}=\frac{36}{25},$$
$$\therefore\ x-\frac{4}{5}=\pm\frac{6}{5},$$
$$\text{et } x=\frac{4}{5}\pm\frac{6}{5}=2 \text{ ou } -\frac{2}{5}.$$

Ex. 3. $\frac{x^2}{3}-1=x+11$..........*Rép.* $x=12$ ou -6.

Ex. 4. $\frac{2x}{3}+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$..............*Rép.* $x=3$ ou $\frac{1}{2}$.

Ex. 5. $\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}=9$..............*Rép.* $x=6$ ou $-\frac{9}{2}$.

Ex. 6. $\frac{6}{x+1}+\frac{2}{x}=3$............*Rép.* $x=2$ ou $-\frac{1}{3}$.

Ex. 7. $x^2-34=\frac{1}{3}x$.............*Rép.* $x=6$ ou $-5\frac{2}{3}$.

Ex. 8. $\frac{x}{5}+\frac{5}{x}=5\frac{1}{5}$..............*Rép.* $x=25$ ou 1.

Ex. 9. $x+\frac{24}{x-1}=3x-4$.........*Rép.* $x=5$ ou -2.

Ex. 10. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$........*Rép.* $x=2$ ou -3.

Ex. 11. $\frac{3x}{x+2}-\frac{x-1}{6}=x-9$......*Rép.* $x=10$ ou $-\frac{11}{7}$.

Ex. 12. Donné $x^2+8x=-31$; trouver la valeur de x.

$$x^2+8x+16=16-31=-15,$$
$$x+4=\pm\sqrt{-15}\ ;$$

$\therefore\ x=-4+\sqrt{-15}$, & $x=-4-\sqrt{-15}$,

l'une et l'autre sont des valeurs impossibles ou imaginaires de x.

Ex. 13. $x^2 - 2x = -2$.........*Rép.* $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.
Ex. 14. $x^2 - 16x = -15$.........*Rép.* $x = 15$ ou 1.
Ex. 15. Soit $13x^2 + 2x = 60$.

Divisez par 13, $x^2 + \frac{2x}{13} = \frac{60}{13}$.

Addition^z. le carré de $\frac{1}{13}$. $\Big\}$ $x^2 + \frac{2x}{13} + \frac{1}{169} = \frac{60}{13} + \frac{1}{169} = \frac{780}{169} + \frac{1}{169} = \frac{781}{169}$.

Extrayez la racine carrée. $\Big\}$ $x + \frac{1}{13} = \pm \frac{\sqrt{781}}{13} = \pm \frac{27.94}{13}$

$$\therefore\ x = \frac{\pm 27.94 - 1}{13} = \frac{26.94}{13} = 2.07 \text{ ou } -2.226.$$

Ex. 16. $x^2 - 6x + 19 = 13$......*Rép.* $x = 4.732$ ou 1.268.
Ex. 17. $5x^2 + 4x = 25$.........*Rép.* $x = 1.871$.

Toute équation dans laquelle l'inconnue n'entre que dans deux termes, avec l'indice de la puissance la plus haute, double celle de la puissance la moins élevée, peut se résoudre comme une équation du second degré par les règles précédentes.

Ex. 18 Soit $x^6 - 2x^3 = 48$.
Complétez le carré, $x^6 - 2x^3 + 1 = 49$;
Extrayez la racine carrée, $x^3 - 1 = \pm 7$;
$\therefore\ x^3 = 8$ ou -6;
et $\therefore\ x = 2$ ou $\sqrt[3]{-6}$.

Ex. 19. $2x - 7\sqrt{x} = 99$.

$$x - \frac{7}{2}\sqrt{x} = \frac{99}{2},$$

$$x - \frac{7}{2}\sqrt{x} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{99}{2} + \frac{49}{16} = \frac{841}{16}.$$

$$\sqrt{x} - \frac{7}{4} = \pm \frac{29}{4},$$

$$\sqrt{x} = \frac{7}{4} \pm \frac{29}{4} = 9 \text{ ou } -\frac{11}{2}.$$

$\therefore$ en carrant les deux membres, $x = 81$ ou $\frac{121}{4}$.

Ex. 20. $x^4+4x^2=12$.....*Rép.* $x=\pm\sqrt{2}$ ou $\pm\sqrt{-6}$.

Ex. 21. $x^6-8x^3=513$.....*Rép.* $x=3$ ou $\sqrt[3]{-19}$.

2me RÈGLE.

Soit $ax^2\pm bx=c$,

Multᶻ. chaque mbre. de l'équation par $4a$. } alors $4a^2x^2\pm 4abx=4ac$.

Additionᶻ. b^2 à chaque membre, nous avons. } $4a^2x^2\pm 4abx+b^2=4ac+b^2$.

Extrayez la racine carrée comme ci-devant.

$$2ax\pm b=\pm\sqrt{4ac+b^2}$$

$$\therefore 2ax^3=\pm\sqrt{4ac+b^2}\mp b.$$

$$\text{et } x=\frac{\pm\sqrt{4ac+b^2}\mp b.}{2a}$$

D'où l'on déduit, que « si on multiplie chaque membre de l'équation par *quatre fois le coefficient de* x^2, et que l'on additionne le carré du coefficient de x, la quantité au premier membre de l'équation sera le carré de $2ax\pm b$. Extrayez la racine carrée de chaque membre de l'équation, et vous aurez une *équation simple*, de laquelle on détermine la valeur de x.»*

Si $a=1$, l'équation est réduite à la forme $x^2\pm px=q$; ainsi, dans ce cas, la Règle peut être appliquée, en « multipliant chaque membre de l'équation par 4, et additionnant le carré du coefficient de x.»

D'après la forme que l'on donne à x dans cette Règle, il est évident qu'il aura *deux* valeurs; l'une correspondante au signe $+$ et l'autre au signe $-$, au radical.

Ex. 1.

Soit $3x^2+5x=42$.

Multipliez chaque membre de l'équation par ($4a$) 12; alors } $36x^2+60x=504$.

---

* On trouve le principe de cette règle dans le *Bija Ganita*, un traité *Hindoo* sur les élémens d'Algèbre.

Additionnez (b^2) 25 à chaque membre de l'équation, nous avons $36x^2+60x+25=504+25=529$.

Extrayez la racine carrée de chaque membre de l'équation, qui donne $6x+5=\pm\sqrt{529}=\pm 23$;

$$\therefore\ 6x=\pm 23-5=18 \text{ ou } -28;$$

$$\text{et } x=\frac{18}{6}=3,$$

$$\text{ou } x=\frac{28}{6}=-\frac{14}{3}=-4\tfrac{2}{3}.$$

Ex. 2.

$$\text{Soit } x^2-15x=-54.$$

Multipliez par 4, alors $4x^2-60x=-216$.

Addition^z. (b^2) 225 à chaque membre. } et $4x^2-60x+225=225-216=9$.

Extrayez la racine carrée, $2x-15=\pm\sqrt{9}=\pm 3$;

$$\therefore\ 2x=15\pm 3=18 \text{ ou } 12,$$

$$\text{et } x=\frac{18}{2} \text{ ou } \frac{12}{2}=9 \text{ ou } 6.$$

DE LA SOLUTION DES PROBLÈMES RENFERMANT DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

69. Dans la solution des problèmes qui renferment le second degré, on trouvera quelquefois que les *deux* valeurs de l'inconnue répondent aux conditions de l'énoncé, et d'autres fois il n'y aura qu'une *seule* valeur qui y répondra. Ceci est une circonstance qu'il sera toujours facile de déterminer d'après la nature du problème.

PROBLÈMES.

Prob. 105. Partagez le nombre 56 en deux parties telles que leur produit soit 640.

Soit x=une partie,
alors $56-x$=l'autre partie,
et $x(56-x)$=le produit des deux parties.
D'où par la donnée, $x(56-x)=640$,
ou $56x-x^2=640$.

Transposez, $x^2-56x=-640$.

Complétez le carré, (RÈGLE I.) $\Big\}$ $x^2-56x+784=784-640=144$.

$\therefore\ x-28=\pm\sqrt{144}=\pm 12$.

et $x=28\pm 12=40$ ou 16.

Dans ce cas il paraît que les *deux* valeurs de l'inconnue sont les *deux* parties du nombre à partager.

PROB. 106. Il y a deux nombres dont la différence est 7, et moitié de leur produit *plus* 30 est égal au carré du *petit* nombre. Quels sont ces nombres?

Soit $x=$le petit nombre,

alors $x+7=$le grand nombre,

et $\dfrac{x\ \ (x+7)}{2}+30=$moitié du produit plus 30.

D'où par la donnée, $\dfrac{x\ (x+7)}{2}+30=x^2$(carré du petit,)

ou $\dfrac{x^2+7x}{2}+30=x^2$.

Multipliez par 2,....$x^2+7x+60=2x^2$.

Transposez............$x^2-7x=60$.

Mult^z. par 4 et addition^z. 49 (RÈGLE II.) $\Big\}$ $4x^2-28x+49=240+49=289$,

$\therefore\ 2x-7=\sqrt{289}=17$

$2x=17+7=24$, ou $x=12$ le *petit nombre.*

d'où $x+7=12+7=19$ le *grand nombre.*

PROB. 107. Partagez le nombre 30 en deux parties telles, que leur produit puisse égaler *huit* fois leur différence.

Soit $x=$la *petite* partie,

alors $30-x=$la *grande* "

et $30-x-x$ ou $30-2x=$leur *différence.*

D'où, par la donnée, $x(30-x)=8\ (30-2x)$,

ou $30x-x^2=240-16x$.

Transposez, $x^2-46x=-240$.

Complétez le carré, (RÈGLE I.) $\left.\right\}$ $x^2-46x+529=529-240=289$;

$\therefore\ x-23=\pm\sqrt{289}=\pm 17$,

et $x=23\pm 17=40$ ou $6=$ la *petite* partie;

$30-x=30-\ 6=24=$ la *grande* "

Dans ce cas, la solution de l'équation amène pour la plus petite partie, 40 et 6. Maintenant comme il est impossible que 40 puisse être une *partie* de 30, nous prenons 6 pour *la petite* partie, ce qui donne 24 pour la *grande;* et les deux nombres 24 et 6 répondent aux conditions requises.

PROB. 108. Une personne achète du drap pour £33 15*s*., qu'elle revend à raison de £2 8*s*. la pièce, et gagne sur le marché le prix coûtant d'une pièce. On demande le nombre de pièces.

Soit $x=$ le nombre de pièces.

Alors $\dfrac{675}{x}=$ le nombre de *chelins* que coûte une pièce,

et $48x=$ le " " qu'elle vendît le tout;

$\therefore\ 48x-675=$ ce qu'elle gagne sur le marché.

D'où, par la donnée, $48x-675=\dfrac{675}{x}$.

Transposez et divisez, $\left.\right\}$ $x^2-\dfrac{225}{16}x=\dfrac{225}{16}$.

Complétez le carré. (RÈGLE I.) $\left.\right\}$ $x^2-\dfrac{225}{16}x+\dfrac{50,625}{1,024}=\dfrac{225}{16}+\dfrac{50,625}{1,024}=\dfrac{65,025}{1,024}$.

$\therefore\ x-\dfrac{225}{32}=\sqrt{\dfrac{65,025}{1,024}}=\dfrac{225}{32}$,

et $x=\dfrac{255+225}{32}=15$.

PROB. 109. A et B partent en *même temps* pour un lieu éloigné de 150 milles. A fait 3 milles à l'heure *de plus* que B, et arrive 8 heures 20 minutes *avant* lui. Combien chacun a-t-il fait de milles à l'heure?

Soit x=les milles à l'heure que fait B.
Alors $x+3=$ " " " " A.

Et $\frac{150}{x}$=le nombre d'heures que marche B.

$\frac{150}{x+3}$=le " " " A.

Mais A arrive au bout de son voyage 8 heures 20 minutes ($8\frac{1}{3}$ heures) avant B.

$$\text{D'où } \frac{150}{x+3}+8\tfrac{1}{3}=\frac{150}{x},$$

$$\text{ou } \frac{150}{x+3}+\frac{25}{3}=\frac{150}{x}.$$

En réduisant, $x^2+3x=54$.

Complétez le carré, $x^2+3x+\frac{9}{4}=54+\frac{9}{4}=\frac{225}{4}$ (Règle I.):

$$\therefore x+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2};$$

et $x=\frac{15-3}{2}=6$ milles à l'heure pour B.
$x+3=9$ " " A.

Prob. 110. Quelques abeilles s'abattirent sur un arbre; à une première volée, la racine carrée de la moitié s'en allèrent; à une seconde, les $\frac{8}{9}$ème prirent la fuite; et il ne restât plus que deux abeilles. Combien d'abeilles s'abattirent sur l'arbre?

Soit $2x^2$=le nombre d'abeilles,

$$\text{alors } x+\frac{16x^2}{9}+2=2x^2$$

$$\text{ou } 9x+16x^2+18=18x^2$$

$$\therefore 18x^2-16x^2-9x=18,$$

$$\text{ou } 2x^2-9x=18.$$

(Règle II.) Multipliez par 8

$$16x^2-72x=144.$$

Additionnez 81; alors $16x^2-72x+81=225$,

$$\text{ou } 4x-9=15;$$

$$\therefore 4x=15+9=24,$$

$$\text{et } x=\frac{24}{4}=6;$$

$$\therefore\ 2x^2=72, \text{ le nombre d'abeilles.}$$

PROB. 111. Partagez 33 en deux parties telles que leur produit soit 162. *Rép.* 27 et 6.

PROB. 112. Quels sont les deux nombres dont la somme est 29 et le produit 100? *Rép.* 25 et 4.

PROB. 113. La différence de deux nombres est 5, et le $\frac{1}{4}$ de leur produit est 26. Quels sont ces nombres? *Rép.* 13 et 8.

PROB. 114. La différence de deux nombres est 6; et si on ajoute 47 à *deux fois le carré du plus petit*, il sera égal au *carré du plus grand.* Quels sont ces nombres? *Rép.* 17 et 11.

PROB. 115. Il y a deux nombres dont la somme est 30; et $\frac{1}{3}$ de leur produit plus 18 est égal au carré du plus petit nombre. Quels sont ces nombres? *Rép.* 21 et 9.

PROB. 116. On a deux nombres dont le produit est 120. Si on ajoute 2 au plus petit, et que l'on soustrait 3 du plus grand, le produit de la somme et du reste sera aussi 120. Quels sont ces nombres? *Rép.* 15 et 8.

PROB. 117. A et B distribuent £1,200 pour secourir un certain nombre de personnes; A secourt 40 personnes plus que B, et B donne £5 à chaque personne plus que A. Combien y a-t-il eu de personnes de secourues par A et B respectivement? *Rép.* 120 par A, 80 par B.

PROB. 118. On a acheté un certain nombre de moutons pour £120. S'il y eut eu 8 moutons de plus, chaque mouton aurait coûté 10 chelins de moins. Combien y avait-il de moutons? *Rép.* 40.

PROB. 119. J'ai acheté un certain nombre de moutons pour £57. En ayant perdu 8, je vendis le reste à 8 chelins de profit par tête, et ainsi je ne perdis rien sur le marché. Combien ai-je acheté de moutons? *Rép.* 38.

PROB. 120. A et B partent ensemble pour un lieu éloigné de 300 milles, A fait un mille de plus à l'heure que B, et arrive au terme de son voyage 10 heures avant lui. Combien chacun a-t-il fait de milles par *heure*?

Rép. A fait 6 milles par heure.
B " 5 " " "

PROB. 121. Partagez le nombre 16 en deux parties de manière que leur produit soit égal à 70.

Soit x=une partie,
alors $16-x$=l'autre.
D'où $x(16-x)$ ou $16x-x^2=70$.
Transposez, et $x^2-16x=-70$.
Complétez le carré,
$$x^2-16x+64=-70+64=-6.$$
$$\therefore x-8=\pm\sqrt{-6}, \text{ ou } x=8\pm\sqrt{-6}.^*$$

PROB. 122. Divisez le nombre 20 en deux parties, de de manière que leur produit soit 105.... $x=10\pm\sqrt{-5}$.

PROB. 123. Résoudre le nombre a en deux facteurs tels, que la somme de leurs n^{me} puissance soit égale à b.

Soit x=un facteur,†
alors $\frac{a}{x}$=l'autre.
D'où $x^n+\frac{a^n}{x^n}=b$,
ou $x^{2n}+a^n=x^n$;
$\therefore x^{2n}-bx^n=-a^n$.

---

* Il est bien connu que le plus grand produit qui puisse s'élever de la multiplication des deux parties dans lesquelles on a partagé un nombre, est lorsque ces deux parties sont égales ; ainsi, le plus grand produit qu'il est possible d'avoir de la division du nombre 16 en deux parties, est quand chaque partie est 8 ; donc en demandant " à partager le nombre 16 en deux parties telles que leur produit soit 70." La solution de la question est *impossible.*

† Par *facteurs* on entend ici les deux nombres qui étant multiplié ensemble produisent le nombre donné ; donc si x=un facteur, $\frac{a}{x}$ doit être l'autre facteur, car $x\times\frac{a}{x}=a$.

Par RÈGLE II.

$$4x^{2n}-4bx^n+b^2=b^2-4a^n,$$

$$\text{et } 2x^n-b=\sqrt{b^2-4a^n},$$

$$\text{ou } 2x^n=b+\sqrt{b^2-4a^n}, \text{ et } x^n=\frac{b+\sqrt{b^2-4a^n}}{2};$$

$$\therefore\ x=\sqrt[n]{\frac{b+\sqrt{b^2-4a^n}}{2}}.$$

PROB. 124. Résoudre le nombre 18 en deux facteurs tels, que la somme de leurs cubes soit 243.

Rép. 6 et 3.

DE LA SOLUTION DU SECOND DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

La solution des équations à *deux* inconnues, dans lesquelles l'une ou même les deux inconnues sont au second degré, ne peut être effectuée par le moyen des règles précédentes, que dans des *cas particuliers** seulement. De ces cas les deux suivants sont assez bien connus.

Ier CAS.

70. " Quand une des équations par lesquelles les valeurs des inconnues doivent être déterminées, cst une équation *simple ;*" dans ce cas, la Règle est, " Trouvez une valeur d'une des inconnues de cette équation simple, et puis substituez à sa place la valeur ainsi trouvée, dans l'autre équation; l'équation sésultante sera une équation du second degré, qui se résout par les règles ordinaires."

* La forme la plus complète dont on puisse se servir pour représenter des équations du second degré à deux inconnues, est la suivante:

$$a\,x^2+b\,y^2+c\,xy+d\,x+e\,y=m$$

$$a'x^2+b'y\ +c'xy+d'x+e'y=m';$$ mais la solution générale de ces sortes d'équations ne peut être effectée qu'au moyen des équations des dégrés supérieurs.

Il y a deux cas bien connus qui admettent des solutions par les règles précédentes ; énoncez les, ainsi que les règles employées pour la rédnction des deux équations en une du second degré.

Ex. 1.

Soit $\left.\begin{array}{l} x+2y=7, \\ \text{et } x^2+3xy-y^2=23 \end{array}\right\}$ trouvez les valeurs de x et y.

De la 1re équation $x=7-2y$, $\therefore x^2=49-28y+4y^2$;
Substituez ces valeurs pour x et x^2 dans la 2de équation, alors $49-28y+4y^2+21y-6y^2-y^2=23$,

ou $3y^2+7y=49-23=26$.

Par Règle II. $36y^2+84y+49=312+49=361$,

$\therefore 6y+7=19$

$6y=19-7=12$, ou $y=2$

$x=7-2y=7-4=3$.

Ex. 2.

Soit $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x+y}{3}=9 \\ \text{et } 3xy=210 \end{array}\right\}$ trouvez les valeurs de x et y.

De la 1re équation, $2x+y=27$;

$\therefore 2x=27-y$.

et $x=\dfrac{27-y}{2}$

D'où, $3xy=3\times\dfrac{27-y}{2}\times y=210$,

ou $3\ (27-y)\ y=420$

$81y-3y^2=420$

$27y-\ y^2=140$;

ou $y^2-27y=-140$.

Par Règle II., $4y^2-108y+729=729-560=169$;

$\therefore 2y-27=13$, ou $y=\dfrac{27+13}{2}=20$,

et $x=\dfrac{27-20}{2}=3\frac{1}{2}$.

Prob. 125. Il y a un certain nombre représenté par deux chiffres. Le chiffre des dizaines est égal à 3 fois celui des unités ; et si on soustrait 12 du nombre lui-même, le reste égalera le carré du chiffre des dizaines. Quel est ce nombre ?

Soit x le chiffre des dizaines et y l'autre ; } alors, par Art. 61, $10x+y$ est le nombre.

$$\left.\begin{array}{r}\text{D'où } x=3y \\ \text{et } 10x+y-12=x^2\end{array}\right\}\text{ par la donnée ;}$$

$$\therefore \text{ en substituant } \Big\}\ 30y+y-12=9y^2, \text{ (car } 10x=30y, \text{ et } x^2=9y^2\text{) ;}$$

$$9y^2-31y=-12\,;$$

$$\therefore y^2-\frac{31}{9}y=-\frac{12}{9}.$$

$$\text{Par Règle I.,}\Big\}\ y^2-\frac{31}{9}y+\frac{961}{324}=\frac{961}{324}-\frac{12}{9}=\frac{961-432}{324}=\frac{529}{324}.$$

$$\text{D'où, } y-\frac{31}{18}=\frac{23}{18}\,;\text{ ou } y=\frac{54}{18}=3,$$

$$x=3y=9\,;$$

et conséquemment le nombre est 93.

Ex. 3. Soit $\left.\begin{array}{r}2x-3y=1 \\ 2x^2+xy-5y^2=20\end{array}\right\}$ déterminez x et y.

Rép. $x=5$, $y=3$.

PROB. 126. Il y a deux nombres tels, que si on soustrait le petit de trois fois le grand, le reste sera 35 ; et si on divise quatre fois le grand par trois fois le petit *plus* un, le quotient sera le petit nombre. Quels sont ces nombres? *Rép.* 13 et 4.

PROB. 127. Quel est le nombre dont la *somme* des chiffres est 15, et si on ajoute 31 à leur *produit*, les chiffres seront renversés? *Rép.* 78.

IIe CAS.

71. Quand x^2, y^2, ou xy, se trouve dans chaque terme des deux équations, ils prennent la forme de

$$a\,x^2+b\,xy+c\,y^2=d,$$
$$a'x^2+b'xy+c'y^2=d'\,;$$

et l'on peut effectuer leur solution :—comme dans les exemples suivants :

Ex. 1.

$$\text{Soit } 2x^2+3xy+x^2=20$$
$$5x^2+4y^2=41\,;$$

Supposez $x=vy$, alors $2v^2y^2+3vy^2+y^2=20$, ou $y^2=\frac{20}{2v^2+3v+1}$, et $5v^2y^2+4y^2=41$, ou $y^2=\frac{41}{5v^2+4}$;

$$\text{D'où } \frac{20}{2v^2+3v+1}=\frac{41}{5v^2+4},$$

qui réduite est, $6v^2-41v=-13$;

$$\therefore\ v^2-\frac{41v}{6}=-\frac{13}{6}.$$

$$\text{Par Règle I, } v^2-\frac{41v}{6}+\frac{1681}{144}=\frac{1369}{144},$$

$$\therefore\ v-\frac{41}{12}=\frac{\pm 37}{12}\,;\ \text{ou } v=\frac{41\pm 37}{12}=\frac{13}{2}\text{ ou }\frac{1}{3}.$$

Soit $v=\frac{1}{3}$, alors $y^2=\frac{41}{5v^2+4}=\frac{41}{\frac{5}{9}+4}=\frac{369}{41}=9$, ou $y=3$,

$$x=vy=\tfrac{1}{3}\times 3=1.$$

Prob. 128. Quels sont les deux nombres, dont la somme multipliée par le grand est 77 ? et dont la différence multipliée par le petit est égale à 12 ?

Soit x=le grand nombre,

y=le petit.

alors $(x+y)\,x=x^2+xy=77$,

et $(x-y)\,y=xy-y^2=12$.

Supposez $x=vy$;

$$\left.\begin{array}{r}\text{Alors } v^2y^2+vy^2=77,\\ \text{et } vy^2-y^2=12.\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{ou } y^2=\dfrac{77}{v^2+v}\,;\\ \text{ou } y^2=\dfrac{12}{v-1}.\end{array}$$

$$\text{D'où } \frac{12}{v-1}=\frac{77}{v^2+v},$$

ou $12v^2+12v=77v-77$; équation

qui donne $v^2-\frac{65}{12}v=-\frac{77}{12}$

et $v^2-\frac{65}{12}v+\frac{4225}{576}=\frac{529}{576}$;

$$\therefore\ v=\frac{65\pm 23}{24}=\frac{88 \text{ ou } 42}{24}=\frac{11}{3}\text{ou}\frac{7}{4}.$$

L'une ou l'autre valeur de v répondra aux conditions du problème ; mais prenons $v=\frac{7}{4}$;

$$\text{Alors } y^2=\frac{12}{v-1}=\frac{12}{\frac{7}{4}-1}=\frac{48}{7-4}=\frac{48}{3}=16,$$

et $y=4$,

$$x=vy=\frac{7}{4}\times 4=7.$$

Les nombres sont donc 4 et 7.

PROB. 129. Trouvez deux nombres, tels, que le carré du grand *moins* le carré du petit soit 56 ; et que le carré du petit *plus* $\frac{1}{2}$ de leur produit soit 40. *Rép.* 9 et 5.

PROB. 130. Il y a deux nombres tels, que 3 fois le carré du grand *plus* deux fois le carré du petit est 110 ; et moitié de leur produit *plus* le carré du petit est 4. Quels sont ces nombres ? *Rép.* 6 et 1.

CHAPITRE VI.

DES PROGRESSIONS, ARITHMÉTIQUES, GÉOMÉTRIQUES ET HARMONIQUES.

72. Si une série de quantités augmente ou diminue par l'*addition* ou *soustraction* continuelle de la même quantité, ces quantités sont dites être en *Progression Arithmétique*. Ainsi les nombres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., (qui *croissent* par l'*addition* de 1 à chaque terme successif,) et les nombres 21, 19, 17, 15, 13, 11, etc., (qui *décrois-*

sent par la *soustraction* de 2 de chaque terme successif,) sont en *progression arithmétique.*

73. En général, si on représente le *premier* terme d'une *progression arithmétique* quelconque par a, et la *raison* par d, on peut alors représenter la série par a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, etc., qui sera évidemment une progression *croissante* ou *décroissante*, selon que d est *positif* ou *négatif*.

Dans les séries précédentes, le *coefficient* de d dans le *second* terme est *un*, dans le *troisième deux*, dans le *quatrième* il est *trois*, etc.; c'est-à-dire, que le coefficient de d dans quelque terme que ce soit est toujours l'*unité moins* que le nombre qui indique *la place de ce terme dans la série.* Ainsi, si on représente le nombre de termes de la série par (n), le n^{me} ou *dernier* terme dans la progression sera $a+(n-1)\,d$: et, si, le n^{me} terme est représenté par l; alors,

$$l=a+(n-1)\,d.$$

Ex. 1. Trouvez le 50^{me} terme de la série, 1, 3, 5, 7, etc.

Ici $\left.\begin{array}{l} a=1 \\ d=2 \\ n=50 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \therefore l=1+(50-1)\,2 \\ =1+49\times 2 \\ =99. \end{array}$

Ex. 2. Trouvez le 12^{me} terme de la série, 50, 47, 44, etc.

Ici $\left.\begin{array}{l} a=50 \\ d=3 \\ n=12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \therefore l=50+(12-1)-3. \\ =50-11\times 3 \\ =17. \end{array}$

Ex. 3. Trouvez le 25^{me} terme de la série, 5, 8, 11, etc.
Rép. 77.

Ex. 4. " 12^{me} " " " 15, 12, 9, etc.
Rép. 18.

Ex. 5. Trouvez 6 moyens arithmétiques (ou termes intermédiaires) entre 1 et 43.

Ici le nombre de termes est 8, savoir: les 6 termes à insérer, et les deux termes donnés, et conséquemment.

Qu'est-ce qu'une progression arithmétique? Donnez un exemple d'une série en progression arithmétique.

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ l=43 \\ n=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Mais } a+(n-a)\,d=l \\ \therefore\ 1+7d=43\,; \\ \therefore\ d=6. \end{array}$$

Et les termes demandés sont 7, 13, 19, 25, 31, 37.

Ex. 6. Trouvez 7 moyens arithmétiques entre 3 et 59.

Rép. 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52.

Ex. 7. Trouvez 8 moyens arithmétiques entre 4 et 67.

Ex. 8. Insérez 9 " " " 9 et 109.

74. Soit a le *premier terme* d'une série de quantités en progression arithmétique, d la *raison*, n le *nombre de termes*, l le *dernier terme*, et S la *somme de la série:* Alors

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+l$$

et écrivant cette série en sens inverse,

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots\ldots+a.$$

Additionnant ensemble ces deux équations, il résulte

$$2\,S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots+(a+l)$$
$$=(a+l)\times n, \text{ puisqu'il y a } n \text{ termes}\,;$$

$$\therefore\ S=(a+l)\frac{n}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

D'où il parait que la somme de la série est égale à la somme des premiers et derniers termes multipliés par moitié du nombre de termes:

Et puisque $l=a+(n-1)\,d$;

$$\therefore\ S=\left\{2a+(n-1)\,d\right\}\frac{n}{2}\ldots\ldots\ldots(2).$$

De cette équation, trois quelconques des quatre quantités a, d, n, s, étant donnés, serviront à trouver la quatrième.

Ex. 1. Trouvez la somme de la série 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., continuez jusqu'à 120 termes.

$$\text{Ici}\ \left.\begin{array}{l} a=1 \\ d=2 \\ n=120 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \therefore S=\left\{2a+(n-1)\,d\right\}\times\frac{n}{2}. \\ \qquad =\left\{2\times1+(120-1)\,2\right\}\times\frac{120}{2}. \end{array}$$

$$=(2+119\times2)\ 60=240\times60=14400.$$

Ex. 2. Trouvez la somme de la série 15, 11, 7, 3, —1, —5, etc., jusqu'à 20 termes.

$$\left.\begin{aligned} \text{Ici } a &= 15 \\ d &= -4 \\ n &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \therefore S &= \left\{2a+(n-1)\,d\right\} \times \frac{n}{2} \\ &= \left\{2\times 15+(20-1)\,-4\right\} \times \frac{20}{2} \\ &= (30-19\times 4)\ 10 \\ &= (30-76)\ 10 \\ &= -46\times 10 = -460. \end{aligned}$$

Ex. 3. Trouvez la somme de 25 termes de la série 2, 5, 8, 11, 14, etc. *Rép.* 950.

Ex. 4. Trouvez la somme de 36 termes de la série 40, 38, 36, 34, etc. *Rép.* 180.

Ex. 5. Trouvez la somme de 150 termes de la série $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}$, etc.

$$\left.\begin{aligned} \text{Ici } a &= \tfrac{1}{3} \\ d &= \tfrac{1}{3} \\ n &= 150 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \therefore S &= \left\{2a+(n-1)\,d\right\} \frac{n}{2} \\ &= \left\{2\times\tfrac{1}{3}+(150-1)\,\tfrac{1}{3}\right\} \frac{150}{2} \\ &= \left(\frac{2}{3}+\frac{149}{3}\right)75 = \frac{151}{3}\times 75 = 3775. \end{aligned}$$

Ex. 6. Trouvez la somme de 32 termes de la série 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, etc. *Rép.* 280.

PROBLÈMES.

PROB. 131. La *somme* d'une progression arithmétique est 1240, la *raison*—4, et le *nombre de termes* est 20. Quel est le *premier terme?*

$$\left.\begin{aligned} \text{Ici } S &= 1240 \\ d &= -4 \\ n &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \therefore S &= \left\{2a+(n-1)\,d\right\} \frac{n}{2} \\ 1240 &= \left\{2a+(20-1)\,-4\right\} \frac{20}{2} \\ &= (2a-19\times 4)\ 10 \\ 124 &= 2a-76\ ; \\ \therefore 2a &= 124+76 = 200, \\ \text{et } \therefore a &= 100. \end{aligned}$$

D'où la série est 100, 96, 92, etc.

Prob. 132. La *somme* d'une série arithmétique est 1455, le *premier terme* est 5, et le *nombre de termes* 30. On demande la *raison* ?

$$\left.\begin{array}{r} \text{Ici } S=1455 \\ a=\quad 5 \\ n=\quad 30 \end{array}\right\} \therefore \begin{array}{l} \{2a+(n-1)\,d\}\dfrac{n}{2}=S, \\ \{2\times 5+(30-1)\,d\}\dfrac{30}{2}=1455 \\ \qquad (10+29d)\ 15=1455; \end{array}$$

Divisant les deux membres par 15, $10+29d=97$,

$$29d=87;$$

$$\therefore\ d=3.$$

D'où la série est 5, 8, 11, 14, etc.

Prob. 133. La *somme* d'une série arithmétique est 567, le *premier terme* est 7, et la *raison* 2. Trouvez le *nombre de termes*.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Ici } S=567 \\ a=\quad 7 \\ d=\quad 2 \end{array}\right\} \therefore \text{ puisque } \begin{array}{l} \{2a+(n-1)\,d\}\dfrac{n}{2}=S \\ \{2\times 7+(n-1)2\}\dfrac{n}{2}=567 \\ n^2+6n=567. \end{array}$$

Complétez le carré, $n^2+6n+9=576$.

Extrayez la racine carrée, $n+3=\pm 24$;

$$\therefore\ n=21 \text{ ou } -27.$$

Prob. 134. La *somme* d'une progression arithmétique est 950, la *raison* est 3, et le nombre de termes 25 Quel est le *premier terme* ? *Rép.* 2.

Prob. 135. La *somme* d'une progression arithmétique est 165, le *premier terme* est 3, et le *nombre de termes* 10. Quelle est la *raison* ? *Rép.* 3.

Prob. 136. La *somme* d'une série arithmétique est 440, le *premier terme* est 3, et la *raison* 2. Quel est le *nombre de termes* ? *Rép.* 20.

Prob. 137. La *somme* d'une série arithmétique est 54, le *premier terme* est 14, et la *raison* -2. Quel est le *nombre de termes* ? *Rép.* 9 ou 6.

PROB. 138. Un voyageur partant pour un lieu éloigné de 198 milles, fait 30 milles le *premier* jour, 28 le *second*, 26 le *troisième* et ainsi de suite. Dans combien de jours arrivera-t-il au terme de son voyage?

$$\text{Ici } \left.\begin{array}{l} a=\ \ 30 \\ d=-\ 2 \\ S=\ 198 \end{array}\right\} \text{trouvez le } \textit{nombre de termes.}$$

$$\text{Or } \left\{2a+(n-1)d\right\}\frac{n}{2}=S,$$

$$\therefore \left\{2\times 30+(n-1)-2\right\}\frac{n}{2}=198,$$

$$(31-n)n=-198,$$

$$\text{ou, } n^2-31n=-198,$$

$$n^2-31a+\left(\frac{31}{2}\right)^2=\frac{961}{4}-198=\frac{169}{4}$$

$$n-\frac{31}{2}=\pm\frac{13}{2};$$

$$\therefore n=\frac{31}{2}\pm\frac{13}{2}=22 \text{ ou } 9.$$

Pour expliquer la difficulté apparente qui surgit des deux valeurs positives de n, qui nous donne *deux périodes différentes* de l'arrivée du voyageur au terme de son voyage, observons que si on porte la série proposée 30, 28, 26, etc., jusqu'à 22 termes, le 16me sera *zéro*, et les six termes restants seront *négatifs;* ce qui indique le *repos* du voyageur le 16me jour, et son *retour en direction opposée* pendant les six jours suivants; et ceci le *ramènera*, au bout du 22me jour, au même point où il était à la fin du 9me jour, savoir, à 198 milles du lieu de son départ.

PROB. 139. Combien de chemin fait une personne pour ramasser 200 pierres placées en ligne directe, par intervalles de 2 pieds l'une de l'autre; supposant qu'elle porte chaque pierre l'une après l'autre à un panier éloigné de 20 verges de la première pierre, et qu'elle parte de l'endroit où se trouve placé le panier?

Il est évident que l'espace parcouru par cette personne sera *deux fois* la somme d'une progression arithmétique, dont le *premier terme* est 20 *verges* (c'est-à-dire 60 pieds), la *raison* 2 pieds, et le *nombre de termes* 200.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ici } a=60\\ l=2\\ n=200\end{array}\right\} \therefore S=\left\{2a+(n-1)d\right\}\times\frac{n}{2}.$$

$$=(120+398)\ 100.$$

$$=518\times100=51800 \text{ pieds}.$$

D'où la distance demandée$=$103,600$=$19 milles - 4 stades - 640 pieds.

Prob. 140. J'ai acheté 47 moutons, à raison d'un chelin pour le *premier*, 3 pour le *second*, 5 pour le *troisième*, et ainsi de suite. A combien me reviennent les moutons? £110 9*s.*

Prob. 141. Un gentilhomme a commencé l'année en donnant en bonnes œuvres, $\frac{1}{4}d.$ le *premier* jour, $\frac{1}{2}d.$ le *second* jour, $\frac{3}{4}d.$ le *troisième*, etc. Combien d'argent avait-il disposé en bonnes œuvres à la fin de l'année? £69 11*s.* $6\frac{3}{4}d.$

Prob. 142. A, fait *uniformément* 6 milles à l'heure, et part pour son voyage 3 heures 20 minutes avant B ; B le suit à raison de 5 milles la *première* heure, 6 la *seconde*, 7 la *troisième*, etc. Dans combien d'heures aura-t-il atteint A? *Rép.* Dans 8 heures.

Prob. 143. Il y a un certain nombre de quantités en progression arithmétique, dont la *raison* est 2, et dont la *somme* est égale à huit fois leur *nombre* ; de plus, si on ajoute 13 au *second* terme, et que l'on divise cette somme par le *nombre de termes*, le quotient sera égal au *premier terme*. Quels sont ces nombres?

Que le *premier terme*$=x$, et le *nombre de termes*$=y$; } alors le *second* terme sera $x+2$.

Dans l'expression $\overline{2a+(n-1)d}\times\frac{n}{2}$, substituez x pour a, 2 pour b, et y pour n, et elle devient $\overline{2x+(y-1)2}\times\frac{y}{2}$ $(=xy+y^2-y)$, pour la *somme* de la série.

Par la donnée, $xy+y^2-y=8y$, ou $y=9-x$,

$$\text{et } \frac{x+2+13}{y}=x.$$

$$\text{D'où } \frac{x+2+13}{9-x}=x, \text{ ou } x^3-8x=-15\,;$$

$$\therefore\ x^2-8x+16=16-15=1,$$

$$\text{et } x-4=\pm 1\,;\ \therefore\ x=5 \text{ ou } 3,$$

$$y=9-x \quad =4 \text{ ou } 6.$$

D'où il paraît qu'il y a *deux* séries de nombres qui rempliront les conditions voulues ; savoir, 5, 7, 9, 11, ou 3, 5, 7, 9, 11, 13.

PROB. 144. Il y a un certain nombre de quantités en progression arithmétique, dont le *premier terme* est 2, et dont la *somme* est égale à 8 fois leur nombre ; si on ajoute 7 au troisième terme, et qu'on divise cette somme par le nombre de termes, le quotient sera la *raison* de la progression. Quels sont ces quantités ?

Rép. 2, 5, 8, 11, 14.

DE LA PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE.

75. Quand une série de quantités augmente ou diminue par la *multiplication* ou la *division* constante de la même quantité ces quantités sont alors dites être en Progression *Géométrique*. Ainsi les nombres, 1, 2, 4, 8, 16, etc.,(qui *croissent* par la *multiplication* constante par 2), et les nombres 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, etc., (qui *décroissent* par la division constante par 3, ou la multiplication par $\frac{1}{3}$), sont en Progression Géométrique.

76. En général, si on représente le *premier terme* d'une telle série, par a, et la *raison* (ou *multiple commun*) par r, on peut alors représenter la progression par a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, etc., qui sera évidemment une progression *croissante* ou *décroissante*, selon que r est un *entier* ou une *fraction*. Dans la progression précédente, l'*indice de* r dans un terme quelconque est toujours égal au nombre qui indique *sa place dans la progression*, diminuée de l'unité. D'où il suit que si on représente le nombre de termes d'une progression par (n), le *dernier terme* sera ar^{n-1}.

Quelle est la définition d'une progression géométrique, donnez un exemple ?

77. Il est évident, par la simple inspection des séries données dans les deux articles précédents, qu'on peut déterminer la *raison* en *divisant* le *second* terme par le *premier*, ou *en divisant un terme quelconque par celui qui le précède.*

Ex. 1. Trouvez la *raison* de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, etc.

$$\text{Ici la raison} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ex. 2. Trouvez la *raison* de la série $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$, etc.

$$\text{Dans cet exemple la raison} = \frac{4}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ex. 3. Trouvez la *raison* dans la série $\frac{5}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}$, etc.

Rép. $\frac{3}{5}$.

78. Soit S la somme de la série a, ar, ar^2, ar^3, etc., alors $a + ar + ar^2 + ar^3 + \text{etc.} \ldots . ar^{n-2} + ar^{n-1} \ldots . = S$.
Multipliez l'équation par r, et elle devient
$ar + ar^2 + ar^3 + \text{etc.} \ldots \ldots . ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = rS$.
Soustrayez la *première* équation de la *seconde*, et vous aurez $ar^n - a = rS - S$, ou $(r-1)\, S = ar^n - a$;

$$\text{et ainsi, } S = \frac{ar^n - a}{r-1}.$$

Si r est une fraction, alors r et ses puissances sont moins que 1.

Dans ce cas, il vaut mieux, pour la facilité du calcul, transposer l'équation en $S = \frac{a - ar^n}{1-r}$, en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{ar^n - a}{r-1}$ par -1

79. Dans la supposition que l soit le dernier terme d'une série de cette espèce, alors $l = ar^{n-1}$, $\therefore rl = ar^n$; d'où $S = \left(\frac{ar - a}{r-1}\right) = \frac{rl - a}{r-1}$. De cette équation on peut, (trois quelconques des termes S, a, r, l,) (étant donnés,) déterminer le quatrième.

Ex. 1. Trouvez la somme de la série 1, 3, 9, 27, etc. jusqu'à 12 termes.

$$\left.\begin{aligned}\text{Ici } a&=1\\ r&=3\\ n&=12\end{aligned}\right\} \therefore S=\frac{ar^n-a}{r-1}=\frac{1\times3^{12}-1}{3-1}.$$

$$=\frac{81^3-1}{2}.$$

$$=\frac{531441-1}{2}=\frac{531440}{2}=265720.$$

Ex. 2. Trouvez la somme de 10 termes de la série $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}$, etc.

$$\left.\begin{aligned}a&=1\\ r&=\frac{2}{3}\\ n&=10\end{aligned}\right\} \therefore S=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\overline{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}\times3}{3-2}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$\times 3$$

$$\text{Or } \left(\frac{2}{3}\right)^{10}=\frac{2^{10}}{3^{10}}=\frac{1024}{59049};$$

$$\therefore 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=1-\frac{1024}{59049}=\frac{58025}{59049},$$

$$\text{et } S=\frac{3\times58025}{59049}=\frac{174075}{59049}.$$

Ex. 3. Trouvez la somme de 7 termes de la série, 1, 3, 9, 27, 81, etc. *Rép.* 1093.

Ex. 4. Trouvez la somme de 1, 2, 4, 8, 16, etc., jusqu'à 14 termes. *Rép.* 16383.

Ex. 5. Trouvez la somme de $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, etc., jusqu'à 8 termes. *Rép.* $\frac{3280}{2187}$.

Ex. 6. Trouvez 3 moyens géométriqnes entre 2 et 32.

$$\left.\begin{aligned}\text{Ici } a&=2\\ l&=32\\ n&=5\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\text{Et } ar^{n-1}=l\\ &\therefore 2r^4=32,\\ &\quad r^4=16,\\ &\therefore r=2.\end{aligned}$$

Et les moyens demandés sont 4, 8, 16.

Comment trouve-t-on la racine d'une progression géométrique ? Quelle est l'expression pour la somme de n terme d'une série de nombres en progression géométrique ?

Ex. 7. Trouvez deux moyens géométriques entre 4 et 256. *Rép.* 16 et 64.

Ex. 8. Trouvez trois moyens géométriques entre $\frac{1}{9}$ et 9. *Rép.* $\frac{1}{3}$, 1, 3.

Ex. 9. Trouvez un moyen géométrique entre a et l.

Soit x le moyen géométrique demandé ;

Alors a, x, l sont trois termes en progression géométrique,

$$\text{et } \frac{x}{a}=\frac{l}{x}$$

$$\text{ou } x^2=al$$

$$\therefore\ x=\sqrt{al}.$$

Ex. 10. Quel est le moyen géométrique entre 16 et 64 ? *Rép.* 32.

Ex. 11. Insérez quatre moyens géométriques entre $\frac{1}{3}$ et 81. *Rép.* 1, 3, 9, 27.

PROBLÈMES.

PROB. 145. Déterminez trois nombres en progression géométrique, tels que leur *somme* soit égale à 7 ; et la *somme de leurs carrés* égale à 21.

Soit $\frac{x}{2}$, x, xy, les nombres. Alors par la donnée,

$$\frac{x}{2}+x+xy = 7\ldots.(1)$$

$$\frac{x^2}{y^2}+x^2+x^2y^2=21\ldots.(2)$$

$$\text{De l'équation (1), } x\left(\frac{1}{y}+1+y\right) = 7$$

$$\therefore \text{ en carrant } x^2\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}+3+2y+y^2\right)=49$$

$$\text{De (2) } x^2\left(\frac{1}{y^2} \quad +1 \quad +y^2\right)=21$$

$$\therefore \text{ par soustraction, } x^2\left(\frac{2}{y}+2+2y\right) =28,$$

$$\text{ou } 14x=28 ;$$

$$\therefore\ x=2.$$

En insérant cette valeur de x en (1),

$$\frac{1}{y}+1+y=\frac{7}{2}$$

$$\therefore\ y^2-\frac{5}{2}y+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}$$

$$\therefore\ y=\frac{5\pm3}{4}=2 \text{ ou } \frac{1}{2}$$

D'où les nombres sont 1, 2, 4 ; ou 4, 2, 1.

Prob. 146. Il y a trois nombres en progression géométrique dont le *produit* est 64, et la *somme* 14. Quels sont ces nombres? *Rép.* 2, 4, 8 ; ou 8, 4, 2.

Prob. 147. Il y a trois nombres en progression géométrique dont la *somme* est 21, et la *somme de leurs carrés* 189. Quels sont ces nombres? *Rép.* 3, 6, 12.

Prob. 148. Il y a trois nombres en progression géométrique ; la somme du *premier* et *dernier* est 52, et le *carré du moyen* est 100. Quels sont ces nombres? *Rép.* 2, 10, 50.

Prob. 149. Il y a trois nombres en progression géométrique, dont la somme est 31, et la somme du *premier* et du *dernier* est 26. Quels sont ces nombres? *Rép.* 1, 5, 25.

SOMMATION D'UNE SÉRIE INFINIE DE FRACTIONS EN PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE ; ET MÉTHODE POUR TROUVER DES DÉCIMALES PÉRIODIQUES.

79. L'expression générale pour la somme d'une série géométrique dont la raison (r) est une *fraction*, est (Art. 78) $S=\dfrac{a-ar^n}{1-r}$. Admettons maintenant que n soit indéfiniment *grand*, alors r^n (r étant une fraction) sera indéfiniment *petit*,* de sorte que ar^n peut être considéré

* Quand r est une fraction, il est évident que r^n décroît comme n croît ; soit par exemple $r=\frac{1}{10}$, alors $r^2=\frac{1}{100}$, $r^3=\frac{1}{1000}$, $r^4=\frac{1}{10000}$ etc., et quand n est indéfiniment grand, le *dénominateur* de la fraction devient si grand à l'égard du *numérateur* ; que la valeur de la fraction elle-même devient moins qu'aucune quantité assignable.

comme *zéro* à l'égard de a dans le numérateur $a-ar^n$ de la fraction exprimant la valeur de S; ainsi, la *limite* qu'approche cette valeur de S est $\frac{a}{1-r}$, quand le nombre de termes est infini.

Ex. 1.

Trouvez la somme de la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, etc. *à l'infini.*

$$\text{Ici } \left.\begin{array}{l} a=1 \\ r=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \therefore S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2-1}=2.$$

Ex. 2.

Trouvez la valeur de $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+$ etc. *à l'infini.*

$$\text{Ici } \left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{5} \\ r=\frac{1}{5} \end{array}\right\} \therefore S=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{5-1}=\frac{1}{4}.$$

Ex. 3. Trouvez la valeur de $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+$ etc. *ad infinitum.* *Rép.* $\frac{3}{2}$.

Ex. 4. " " $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+$ etc. *ad infinitum.* *Rép.* 4.

Ex. 5. " " $\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+$ etc. *ad infinitum.* *Rép.* $\frac{2}{3}$.

80. Ces opérations nous fournissent une méthode expéditive pour évaluer les *décimales périodiques*; dont les nombres qui les composent sont des progressions géométriques, et dont les *raisons* sont $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., selon le nombre des facteurs contenus dans le décimal *répéteur*.

Ex. 1.

Trouvez la valeur de la décimale périodique .33,333, etc. Cette décimale est représentée par la série géométrique $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+$ etc., dont le *premier terme* est $\frac{3}{10}$, et la *raison* $\frac{1}{10}$.

$$\text{D'où } \left.\begin{aligned} a&=\frac{3}{10},\\ r&=\frac{1}{10},\end{aligned}\right\} \therefore S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10-1}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

Ex. 2. Trouvez la valeur de .32,323,232, etc., *ad infinitum.*

$$\text{Ici } \left.\begin{aligned} a&=\frac{32}{100},\\ r&=\frac{1}{100},\end{aligned}\right\} \therefore S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{32}{100-1}=\frac{32}{99}.$$

Ex. 3. Trouvez la valeur de .713,333, etc., *à l'infini.* La série des fractions représentant la valeur de cette décimale est $\frac{71}{100}+$ (série géométrique) $\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+$ etc. $=\frac{71}{100}+S$.

$$\text{Ici } \left.\begin{aligned} a&=\frac{3}{1000}\\ r&=\frac{1}{10}\end{aligned}\right\} \therefore S=\frac{\frac{3}{1000}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{1000-100}+\frac{3}{900}=\frac{1}{300}.$$

D'où la valeur du décimal$=\left(\frac{71}{100}+S\right)\frac{71}{100}+\frac{1}{300}+\frac{214}{300}$ $=\frac{107}{150}$.

Ex. 4. Trouvez la valeur de .81,343,434, etc., *ad infinitum.*

$$\text{Ici } \left.\begin{aligned} a&=\frac{34}{10000}\\ r&=\frac{1}{100}\end{aligned}\right\} \therefore S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{34}{10000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{34}{10000-100}=\frac{34}{9900}$$

Et la valeur de la décimale $\Big\} = \frac{81}{100} + S = \frac{81}{100} + \frac{34}{9900} = \frac{8053}{9900}$.

Ex. 5. Trouvez la valeur de .77,777, etc., *à l'infini.*

Rép. $\frac{7}{9}$.

Ex. 6. " " .232,323, etc., *à l'infini.*

Rép. $\frac{23}{99}$.

Ex. 7. " " .83,333, etc., *à l'infini.*

Rép. $\frac{5}{6}$.

Ex. 8. " " 7,141,414, etc., *à l'infini.*

Rép. $\frac{707}{990}$.

Ex. 9. " " .956,666, etc., *à l'infini.*

Rép. $\frac{287}{300}$.

On peut encore déterminer la valeur d'une décimale périodique comme suit :—Dans l'exemple 4 ci-dessus.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Soit } S = & .813434\ldots. \\
\therefore\ 1000\, S = & 8134.3434\ldots. \\
\text{et } 100\, S = & 81.3434\ldots. \\
\hline
\therefore\ 9900\, S = & 8053
\end{array}
$$

$$\therefore S = \frac{8053}{9900}, \text{ comme sus-dit.}$$

PROB. 150. Un corps en mouvement parcourt un espace d'un mille, la *première* seconde, mais par une réaction, il ne parcourt que $\frac{1}{2}$ mille la *deuxième* seconde, $\frac{1}{4}$ la *troisième*, et ainsi de suite.

Démontrez, d'après cette loi de motion, que quoique le corps soit en mouvement pendant *toute l'éternité*, il ne parcourra pas un espace plus grand que 2 milles.

PROGRESSION HARMONIQUE.

81. Une série de quantités, dont les *réciproques* sont en progression arithmétique, sont dites être en *Progression Harmonique*. Ainsi les nombres 2, 3, 6, sont en *progression harmonique*, puisque ~~leurs~~ reciproques $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, sont en progression *arithmétique* ($-\frac{1}{6}$ étant la *raison*).

Ex. 1. Trouvez un moyen harmonique entre 1 et $\frac{2}{3}$.

Soit x le *moyen* demandé :

Alors $1, \frac{1}{x}, \frac{3}{2}$, sont en progression arithmétique,

$$\text{Et } \frac{1}{x}-1=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{2}{x}=1+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{5}{2}$$

$$\therefore x=\frac{4}{5}.$$

Ex. 2. Trouvez un troisième nombre qui soit en progression harmonique avec 6 et 4.

Soit x le nombre demandé :

Alors $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{x}$, sont en progression arithmétique.

$$\text{Et } \frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$\therefore x=3.$$

Ex. 3. Insérez trois *moyens* harmoniques entre 9 et 3.

Les *réciproques* de 9 et 3 sont $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{3}$, qui sont le *pre-*

mier et le *dernier* terme d'une progression *arithmétique*, entre lesquels il s'agit d'insérer trois *moyens arithmétiques.* Nous aurons donc, d'après l'Art. 73—

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{9} \\ l=\frac{1}{3} \\ x=5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Et } a+(n-1)\ d=l, \\ \therefore\ \frac{1}{9}+(5-1)\ d=\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 4d&=\frac{1}{3}-\frac{1}{9} \\ &=\frac{3}{9}-\frac{1}{9} \\ &=\frac{2}{9} \\ \therefore\ d&=\frac{1}{18}. \end{aligned}$$

D'où, $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{5}{18}$, sont les *moyens* arithmétiques à insérer entre $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{3}$, et ainsi *leurs réciproques* $6, \frac{9}{2}, \frac{18}{5}$, sont les trois *moyens* harmoniques demandés.

Ex. 4. Trouvez un moyen harmonique entre 12 et 6.
Rép. 8.

Ex. 5. Les nombres 4 et 6 étant deux termes d'une progression harmonique ; déterminez un troisième terme.
Rép. 12.

Ex. 6. Déterminez deux moyens harmoniques entre 84 et 56. *Rép.* 72 et 63.

Ex. 7. Insérez trois moyens harmoniques entre 15 et 3.
Rép. $\frac{15}{2}, 5, \frac{15}{4}$.

82. Soit a, b, c, d, e, etc., une série de quantités en progression *harmonique ;* alors $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$, etc., sont

en progression *arithmétique*, et selon la définition d'une progressiou *arithmétique* (Art. 72), nous avons

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=\frac{1}{e}-\frac{1}{d}\ldots\ldots(3)$$

$$\text{etc.}=\text{etc.}$$

De (1) $\dfrac{a-b}{ab}=\dfrac{b-c}{c}$

$$\frac{a-b}{a}=\frac{b-c}{c}$$

$$\therefore\ \frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}.$$

ou changeant cette équation en proportion,

$$a:c::a-b:b-c$$

Similairement de (2) $b:d::b-c:c-d$

" " (3) $c:e::c-d:d-e$

et ainsi de suite pour un nombre quelconque de quantités.

Ces proportions servent assez fréquemment de *définition* aux quantités en progression *harmonique*, et peuvent encore être exprimées comme suit:—si on prend *trois* quantités quelconques en progression *harmonique*, la ***première est à la troisième comme la différence entre la première et la seconde est à la différence entre la seconde et la troisième.***

PROB. 151. Donnée $a^x=b^y=c^z$, où a, b, c sont en progression géométrique. Prouvez que x, y, z sont en progression harmonique.

$$a^x=b^y;\ \therefore\ a=b^{\frac{y}{x}}\ldots\ldots(1)$$

$$c^z=b^y;\ \therefore\ c=b^{\frac{y}{z}}\ldots\ldots(2).$$

En multipliant (1) par (2) $ac=b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

Mais par la progression géométrique $ac=b^2$

$$\therefore b^2=b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}};$$

$$\text{et} \therefore 2=\frac{y}{x}+\frac{y}{x},$$

$$\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$$

$$\text{ou } \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}.$$

CHAPITRE VII.

PERMUTATIONS ET COMBINAISONS.

83. Par *Permutations* on entend le nombre de *changements* que des quantités quelconques a, b, c, d, e, etc., peuvent subir à l'égard de leur ordre, lorsqu'on les prend *deux à deux*, *trois à trois*, etc., etc. Ainsi *ab*, *ac*, *ad*, *ba*, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*, sont les diverses permutations des quatre quantités a, b, c, d, prises *deux à deux ; abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, des *trois* quantités a, b, c, prises *trois à trois*, etc., etc.

84. Soit n quantités, a, b, c, d, e, etc.: alors, par Art. 83, il parait qu'il y aura $(n-1)$ permutations dans lesquelles a est pris le premier ; pour une raison analogue il y aura $(n-1)$ permutations dans lesquelles b sera premier ; et ainsi de c, d, e, etc. D'où il y aura n fois $(n-1)$ permutations de la forme *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, etc.; *ba*, *bc*, *bd*, *be*, etc.; *cb*, *cd*, *ca*, *ce*, etc.; c'est-à-dire, "*le nombre de permutations de* n *choses prises deux à deux est* $(n-1)$."

85. Si on prend ces n quantités *trois à trois*, il y aura $n\ (n-1)\ (n-2)$ *permutations*. Car si on substitue $(n-1)$ pour n dans le dernier article, alors le nombre de changements de $n-1$ choses prises *deux à deux* sera $(n-1)\ (n-2)$; d'où le nombre de changements de a, b, c, d, e, etc., pris *deux à deux* est $(n-1)\ (n-2)$, et conséquemment il y a $(n-1)\ (n-2)$ changement des quantités a, b, c, d, e, etc., prises *trois à trois*, a étant la première; pour la même raison il y a $(n-1)\ (n-2)$

changements en plaçant b la première ; et ainsi de suite de c, d, e, etc. Le nombre de changements de cette espèce montera donc à $n(n-1)(n-2)$.

86. *Trouvez le nombre de changements de* n *choses prises* r.

Par les Art. 85 et 86—

Le nombre pris *deux à deux* $= n(n-1)$

" " *trois à trois* $= n(n-1)(n-2)$

Similairement *quatre à quatre* $= n(n-1)(n-2)(n-3)$

Si on admet que l'ordre qu'on observe dans ces cas particuliers, soit général, c'est-à-dire si le nombre de changements de n choses a, b, c, d, etc., prises $r-1$, soit

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots n-r+2)$$

Alors, en omettant a, il est également vrai que le nombre de changements de $n-1$ choses b, c, d, etc., prises $r-1$, sera en mettant $n-1$ pour n dans cette dernière expression $(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$

Or, si on place a avant chacun de ces changements il y aura $(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$

changements de choses prises r, dans lesquels a est le *premier*. Il est clair qu'il y aura semblablement le même nombre de changements de choses prises r, dans lesquels chacune des autres choses b, c, d, etc., se trouveront *respectivement premières;* et comme il y a n choses, le nombre de changements total de n choses prises ensemble r, sera la somme des changements pris ensemble r dans lesquels les n choses a, b, c, d, etc., se trouveront respectivement en première ligne, c'est-à-dire n fois $(n-1)$ $(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$,

$$\text{ou } n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1).$$

Il a été ainsi prouvé, que si l'ordre par lequel (on trouve que) l'expression pour le nombre de changements de n choses prises ensemble $r-1$, soit vraie, elle est vraie aussi pour le nombre suivant (supérieur), ou quand n choses sont prises ensemble r; mais on a trouvé que l'ordre de l'expression pour le nombre de changements de n choses prises ensemble *deux à deux*, et pour le nombre de changements de n choses prises ensemble *trois à trois;* il est donc vrai par le théorème qu'on vient de démontrer quand les n choses sont prises ensemble *qua-*

tre à quatre, et s'il est vrai quand les choses sont prises *quatre à quatre*, il est aussi vrai quand elles sont prises ensemble *cinq à cinq*, et ainsi pour un nombre quelconque pas plus grand que n, prises ensemble.

Cette preuve nous fournit un excellent exemple d'*induction* démonstrative, une méthode de raisonner d'une grande importance dans les sciences mathématiques.

87. Si $r=n$, c'est-à-dire, si les changements regardent toutes les quantités à la fois, alors (puisque $n-r=n$) leur *nombre* sera $n\ (n-1)\ (n-2)$ etc.......2. 1. Ainsi, le nombre de changements qu'on pourrait former avec les lettres composant le mot "*budget*" sont $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$.

88. Mais si la *même* lettre reparaissait un certain nombre de fois, il est évident qu'il faudrait *diviser* le nombre total de changements par le nombre de changements qu'il y aurait eus, si les lettres avaient été différentes au lieu de la répétition de la même lettre. Ainsi si la même lettre se trouvait *deux fois*, il faudrait diviser par 2×1 ; si elle s'y trouvait *trois fois*, il faudrait diviser par $3\times2\times1$; si p fois par $1.2.3.\ .\ .\ p$; et ainsi de suite pour toute autre lettre qui pourrait s'y trouver plus d'une fois. Ainsi l'expression générale pour un nombre de permutations de n choses, desquelles il y a p d'*une* sorte, r d'une *autre*, q d'une *autre*, etc., etc., est $\dfrac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)..2.1}{1.2.3..p\times1.2.3..r\times1.2.3..q}$. Ainsi les changements qu'on pourrait effectuer avec les lettres qui composent le mot "clémence" (puisque e s'y trouve *trois fois* et c *deux fois*) $\dfrac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3\times1.2}=3360$.

Prob. 152. Quel est le nombre d'arrangements que peuvent faire 6 personnes à table ?

Le nombre$=1\times2\times3\times4\times5\times6=720$.

Prob. 153. On demande le nombre de changements qu'on peut faire sur un jeu de 8 cloches.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Le nombre de}\\ \text{changements}\end{array}\right\}=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8=40320.$$

PROB. 154. Avec 5 drapeaux de couleurs différentes, combien peut-on faire de signaux?

Le nombre de signaux, quand les drapeaux sont pris

Séparément, sont.....................= 5

Deux à deux,....$=5 . 4$..............= 20

Trois à trois,....$=5 . 4 . 3$............= 60

Quatre à quatre,..$=5 . 4 . 3 . 2$..........=120

Cinq à cinq,.....$=5 . 4 . 3 . 2 . 1$.......=120

∴ le nombre total de signaux=325

PROB. 155. Quel est le nombre de permutations qu'on peut former sur 10 lettres prises 5 à la fois?

Rép. 30240.

PORB. 156. Combien peut-on faire de changements avec les mots Algèbre et Mississippi respectivement, prenant toutes les lettres à la fois? *Rép.* 2520 et 1680.

DES COMBINAISONS.

89. Par *Combinaison* on entend le nombre de *collections* qu'on peut former avec les quantités, *a, b, c, d, e,* etc., prises deux à deux ensemble, trois à trois ensemble, etc., etc., sans avoir égard à l'*ordre* dans lequel ces quantités sont arrangées dans chaque collection. Ainsi *ab, ac, ad, bc, bd, cd,* sont les combinaisons qu'on peut former avec les quatre quantités *a, b, c, d,* prises deux à deux ensemble ; *abc, abd, acd, bcd,* les combinaisons qu'on peut former avec les mêmes quantités prises, trois à trois ensemble ; etc., etc.

90. De l'expression (dans l'art. 86) pour trouver le nombre de *permutations* de n choses prises r à r ensemble, nous déduisons tout d'abord le théorème pour trouver le nombre de *combinaisons* de n choses prises de la même manière. Car les permutations de n choses prises deux à deux ensemble étant $n\ (n-1)$, et comme chaque *combinaison* admet autant de *permutations* qu'on peut faire avec *deux* choses (qui est 2×1), le nombre de *combinaisons* doit être égal au nombre de *permutations* divisés par 2 ; c'est-à-dire le nombre des *combinaisons* de n choses prises *deux à deux* ensemble est $\frac{n\ (n-1)}{2}$. Pour

la même raison, les *combinaisons* de n choses prises *trois à trois* ensemble doivent être égales à $\frac{n\ (n-1)\ (n-2)}{1\ .2\ .3}$; et en général, les combinaisons de n choses prises r à r ensemble doivent être égales à $\frac{n(n-1)(n-2)..(n-r+1)}{1\ .2\ .3..r}$.

Prob. 157. Déterminez le nombre de combinaisons qu'on peut faire avec 8 lettres prises 5 à la fois.

$$\text{Le nombre} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 56.$$

Prob. 158. Quel est le nombre total de combinaisons qu'on peut former avec 6 couleurs prises dans toutes les manières possibles ?
Nombre de combinaisons quand les couleurs sont prises,

$$
\begin{array}{ll}
1 \text{ à la fois} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 6 \\
2 \ldots\ldots = \dfrac{6\ .5}{1\ .2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 15 \\
3 \ldots\ldots = \dfrac{6\ .5\ .4}{1\ .2\ .3} \ldots\ldots\ldots\ldots & = 20 \\
4 \ldots\ldots = \dfrac{6\ .5\ .4\ .3}{1\ .2\ .3\ .4} \ldots\ldots\ldots & = 15 \\
5 \ldots\ldots = \dfrac{6\ .5\ .4\ .3\ .2}{1\ .2\ .3\ .4\ .5} \ldots\ldots & = 6 \\
6 \ldots\ldots = \dfrac{6\ .5\ .4\ .3\ .2\ .1}{1\ .2\ .3\ .4\ .5\ .6} \ldots & = 1
\end{array}
$$

Le nombre total est donc $= 63$

Prob. 159. Combien de combinaisons différentes peut on faire avec 8 lettres, prises dans toutes les manières possibles. *Rép.* 255.

PROBLÈMES.

1. Partagez 46 en deux parties telles que la somme des quotients qu'on obtiendra en divisant l'une par 7 et l'autre par 3 soit égale à 10. *Rép.* 28 et 18.

2. On a partagé $1170 entre trois personnes A, B, C, proportionnellement à leur âge ; l'âge de B est d'un tiers plus grand que celui de A, qui n'est que la moitié de celui de C. Combien chacune d'elle a-t-elle reçu ?
Rép. A, $270 ; B, $360 ; C, $540.

3. Un capital est tel que, augmenté de ses intérêts simples pendant 5 ans, à 4 pour 100, il s'élève à la somme de $8208. Quel est le capital ? *Rép.* $6840.

4. Un capitaliste a placé les $\frac{4}{5}$ de ses fonds à 4 pour 100, et le $\frac{1}{5}$ restant à 5 pour 100 ; il retire en tout $2940. Combien a-t-il prêté en tout ? *Rép.* $70000.

5. Une personne fait valoir deux capitaux, l'un de $5500 à 4 pour 100, et, $4\frac{1}{2}$ ans plus tard, l'autre de $8000 à 5 pour 100. Dans combien de temps ces deux capitaux auront-ils rapporté le même intérêt ? *Rép.* 10 ans à partir du jour où le premier capital a été placé.

6. J'avais une somme dans un sac, j'en retirai le tiers, et j'y remis $50 ; quelque temps après je pris le quart de ce qu'il y avait dans le sac, et j'y mis encore $70 ; il y avait alors $120 ; combien y avait-il d'abord ?
Rép. $25.

7. A dit à B : donne-moi $100, et j'aurai autant d'argent que toi.—Donne-moi $100, dit B à A, j'aurai le double de ce que tu as. Combien chacun a-t-il ?
Rép. $500 et $700.

8. Trouvez deux nombres dont la différence, la somme et le produit, soient entre eux comme les nombres 2, 3, et 5. *Rép.* 2, et 10.

9. La somme de deux nombres est 13, et la différence de leurs carrés 39 : quels sont ces nombres ?
Rép. 5 et 8.

10. A et B n'ont à eux deux que les $\frac{2}{3}$ de C ; B et C ont à eux deux 6 fois autant que A, et si B avait $680 de plus qu'il n'a réellement, il aurait autant que A et C ensemble. Combien chacun a-t-il ?
Rép. A, $200 ; B, $360 ; C, $840.

11. Quel est le nombre dont le septième multiplié par le huitième et le produit divisé par trois donnent pour résultat $298\frac{2}{3}$? *Rép.* 224.

12. Trouvez deux nombres dont le produit est 750, et le quotient $3\frac{1}{3}$. *Rép.* 50 et 15.

13. Quelqu'un à qui on demandait son âge, répondit : ma mère achevait sa vingtième année au moment de ma naissance, et le nombre de ses années multiplié par les miennes surpasse de 2500 ans son âge et le mien réunis. Quel âge a-t-il ? *Rép.* 42.

14. Un homme achète un meuble, et le revend peu de temps après $144 ; à ce compte il gagne autant pour 100 que le meuble lui avait coûté. Combien avait-il payé ce meuble ? *Rép.* $80.

15. Trouvez deux nombres dont la somme est 41 et la somme des carrés 901. *Rép.* 15 et 26.

16. La différence de deux nombres est 8 et la somme des carrés 544. Quels sont ces nombres ?
Rép. 12 et 20.

17. Le produit de deux nombres est 255 et la somme de leurs carrés est 514. Quels sont ces nombres ?
Rép. 15 et 77.

18. Partagez le nombre 16 en deux parties telle, que, si à leur produit on ajoute la somme de leurs carrés, le résultat soit 208. *Rép.* 4 et 2.

19. Quel est le nombre qui, ajouté à sa racine carrée, donne pour somme 1332 ? *Rép.* 1296.

20. Quel est le nombre qui surpasse de $48\frac{3}{4}$ sa racine carrée ? *Rép.* $56\frac{1}{4}$.

21. Trouvez deux nombres tels, que leur somme, leur produit et la différence de leurs carrés, soient égaux entre eux. *Rép.* $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

22. Trouvez deux nombres dont la différence multipliée par la différence de leurs carrés donne pour produit 160, et dont la somme multipliée par la somme de leurs carrés donne pour produit 580. *Rép.* 7 et 3.

23. Quelle est la raison d'une progression par différence de 22 termes dont le premier terme est 1 et le dernier 15 ? *Rép.* $\frac{2}{3}$.

24. Il existe un nombre de deux chiffres tel, qu'en le divisant par la somme de ses chiffres, puis renversant le nombre et divisant ce nouveau nombre par la somme de ses chiffres, la différence des deux quotients est égale à la différence des chiffres, et le produit des deux quotients au nombre lui-même. Quel est ce nombre ? *Rép.* 18.

25. Le triple de l'age de Louise est autant au-dessus de 40 ans, que son tiers est au-dessous de 10. Quel âge a-t-elle ? *Rép.* 15 ans.

26. On demande combien il est entré d'œufs dans une omelette, sachant que les $\frac{3}{5}$ de la totalité, augmenté des $\frac{2}{5}$ d'un œuf, surpassent les $\frac{3}{8}$ de cette totalité de la racine carrée de tous les œufs employés. *Rép.* 16.

27. La fortune m'avait été contraire ce matin, mais elle m'a été favorable ce soir ; j'ai doublé le reste de

mon argent, et au lieu de £5 que je perdais, j'en ai maintenant 10 de bénéfice. Quel est le nombre actuel de mes louis? *Rép.* £30.

28. Si l'on doublait mes appointements, disait un comédien, ils surpasseraient de \$96 le carré du vingt-cinquième de ce qu'ils sont. Combien gagnait-il? *Rép.* \$1200.

29. Trouvez deux nombres dont la somme égale 63, et dont les $\frac{5}{8}$ de l'un soient égaux au quintuple de l'autre. *Rép.* 56 et 7.

30. Ajoutez 5 au nombre de mes enfants, doublez le résultat, vous aurez triplé ma famille. Combien ai-je d'enfants? *Rép.* 10.

31. Deux nombres sont tels que le triple du plus petit surpasse le plus grand de 3 unités; et si l'on augmente à la fois le plus grand des $\frac{3}{11}$ et le plus petit des $\frac{3}{4}$, le premier devient double du second. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 33 et 12.

32. Le frère dit à sa sœur: j'aurais besoin de $\frac{1}{4}$ de tes louis pour en avoir 30; remets-les-moi. Il me faudrait, répond la sœur, les $\frac{1}{5}$ des tiens pour en avoir 40; veux-tu me les remettre? Combien chacun d'eux avait-il de louis? *Rép.* £25 et £20.

33. Grâce à un legs qui quintuple son revenu, Michel peut dépenser \$12 par jour et économiser chaque année une somme égale aux $\frac{27}{60}$ de ce legs. De combien a-t-il hérité? *Rép.* \$4800.

34. César hérite de Paulin, ce qui augmente son revenu, des $\frac{2}{3}$. Henri hérite ensuite de César et son revenu est triplé. Quel était le revenu primitif de chacun des trois, sachant que celui de Henri surpassait de \$1000 celui de Paulin?
Rép. César, \$6000; Paulin, \$4000; Henri, \$5000.

35. Blaise achète un cheval qu'il vend ensuite. S'il en eût retiré $\frac{1}{6}$ de plus, son bénéfice eût éte double, et n'eût été inférieur que de \$10 à la moitié de ce que lui coûtait le cheval. Combien l'avait-il payé et combien l'a-t-il vendu? *Rép.* \$100 et \$120.

36. Déterminez deux nombres dont la différence soit égale à l'un d'eux, et dont le produit surpasse de 18 unités le triple de la somme. *Rép.* 12 et 6.

37. De trois numéros, le plus petit est inférieur au moyen de $\frac{1}{6}$; celui-ci est inférieur au plus grand de $\frac{1}{4}$, et si chacun des trois était réduit de $\frac{1}{3}$, leur somme serait diminué de 19 unités. Quels sont ces trois numéros? *Rép.* 24, 18 et 15.

38. Le triple d'un nombre, diminué de 20 unités, est autant au-dessus du double de ce nombre que son quart, augmenté de 2 unités, est au-dessous de sa moitié. Quel est ce nombre? *Rép.* 24.

39. Louise achète $2\frac{1}{2}$ livres de sucre à 6*d.* la livre, et donne en paiement une pièce telle, que le carré de la pièce qu'on lui rend surpasse le triple de la dépense d'une somme égale à la pièce rendue. De combien est la pièce donnée par Louise? *Rép.* 1*s.* 8*d.*

40. Par quel nombre faudrait-il multiplier 3 pour que les $\frac{5}{12}$ du produit égalassent la somme de deux facteurs? *Rép.* Par 12.

41. Lorsque la petite fille vint au monde, le grand-papa avait $3\frac{1}{2}$ fois l'âge actuel de la petite fille, et 10 ans après, celle-ci eut $\frac{1}{8}$ de l'âge qu'avait alors le grand-papa. Quel âge ont-ils l'un et l'autre? *Rép.* 90 et 20 ans.

42. Déterminez trois nombres dont le plus grand, égal à la somme des deux autres, égal aussi les $\frac{2}{9}$ de leur produit et dont le moindre ne contient que $\frac{1}{7}$ des deux autres réunis. *Rép.* 24, 18, et 6.

43. L'oncle a retiré les $\frac{5}{12}$ d'une succession, le neveu $\frac{1}{3}$, et la nièce le reste. Le produit des parts de ces deux-ci est inférieur de 13 millions au carré de la part de l'oncle. De combien était cette succession?

Rép. \$12,000.

44. J'ai mis sur deux numéros dont la somme égale 4 fois la différence, et dont le plus haut, augmenté de la différence, surpasse le plus bas de 48 unités. Quels sont ces numéros? *Rép.* 60 et 36.

45. Ma montre est très méthodique dans sa marche. Si je la laissais faire, elle me donnerait l'heure exacte une fois régulièrement tous les deux mois. Quel est la variation de ma montre par heure?

Rép. $\frac{1}{2}$ minute d'avance ou de retard.

46. Il y a 4 ans, la sœur avait $\frac{1}{5}$ d'années de plus que le frère; dans 4 ans le frère aura $\frac{1}{10}$ d'années de moins que la sœur. Quel âge ont-ils aujourd'hui?

Rép. La sœur, 16 ans; le frère, 14 ans.

47. Si mon gain eût été double, disait un joueur, j'eusse carré le nombre de mes louis; s'il n'eût été que $\frac{1}{2}$ de ce qu'il est, je les aurais triplés seulement. Quel était son gain? *Rép.* £36.

48. Mon oncle a été $\frac{1}{3}$ de sa vie garçon, $\frac{1}{3}$ veuf, et $\frac{1}{3}$ marié. Lorsqu'il épousa ma tante, elle avait $\frac{1}{3}$ moins d'années que lui, et 8 années après, il en eut $\frac{1}{3}$ plus qu'elle. A quel âge sont-ils morts l'un et l'autre?

Rép. A 72 et à 40.

49.* L'âge de la sœur égal à volonté la somme ou le produit des années de ses deux frères qui sont jumeaux. Quel âge a chacun des trois?

Rép. La sœur 4 ans; chaque frère 2 ans.

---

* Nota. L'énoncé de ce problème a cela de particulier qu'il n'articule aucune quantité *numérique quelconque*.

50. Retranchez $\frac{1}{6}$ de l'âge du frère ; ajoutez $\frac{1}{9}$ à l'âge de la sœur, vous les rendrez jumeaux et la somme de leurs années aura diminué de 2. Quel âge ont-ils ?
Rép. 24 et 18 ans.

51. Un joueur à qui l'on demande combien il a gagné de louis, répond : l'un des facteurs de mon gain n'est que moitié de l'autre, et leur somme n'est que moitié de mon gain. Combien avait-il gagné de louis ?†
Rép. £18.

52. Déterminez deux nombres dont le plus petit, élevé au carré, soit égal aux $\frac{4}{5}$ du plus grand, et dont le plus grand, diminué des $\frac{3}{4}$ excède encore de $\frac{1}{4}$ le plus petit. *Rép.* 20 et 4.

53. Le produit de deux nombres égal 3 fois leur somme, et leur quotient est 3. Quels sont ces deux nombres ? *Rép.* 12 et 4.

54. Si l'on carre, disait une demoiselle, $\frac{1}{3}$ plus 1 des années qui me manquent pour avoir un quart de siècle, l'on aura mon âge. Quel âge avait-elle ? *Rép.* 16 ans.

55. Un joueur perd du premier coup un nombre de piastres égal au carré de $\frac{1}{10}$ de l'argent qu'il avait sur lui ; mais, au second coup, il quintuple son reste, et il se retire sans perte ni bénéfice. Quelle somme avait-il ?
Rép. \$80.

56. Je vais faire ajouter à ma bibliothèque cinq nouveaux rayons dont chacun contiendra 20 volumes de plus que les dix rayons déjà existants, et j'aurai ainsi 1000 volumes en plus. Combien en ai-je actuellement ?
Rép. 600.

57. Multipliez moitié de l'âge du père par moitié de l'âge du fils, vous aurez le carré de l'âge de ce dernier,

---

† Ce problème ne renferme dans son énoncé aucune quantité *connue*.

et ce carré est égal au double de la somme des deux âges. Quel âge ont le père et le fils?

Rép. 40 et 10 ans.

58. La largeur de mon salon n'égale que les $\frac{3}{4}$ de sa longueur. Aussi large que long, il aurait 144 pieds carrés de plus. Quelles sont ses deux dimensions?

Rép. 24 sur 18.

59. La différence entre les $\frac{5}{6}$ de mon âge, diminués de 5 unités, et ses $\frac{4}{9}$ augmentés de 3 unités, est telle que son carré reproduit mon âge. Quel est cet âge.

Rép. 36 ans.

60. Le produit de deux nombres égal 220. Si du grand nombre on retranche la différence, le produit des deux nombres diminuera de 99 unités. Déterminez ces deux nombres *au moyen d'une seule inconnue*.

Rép. 20 et 11.

61. A quel numéro de la rue demeurez-vous? La somme des deux chiffres de ce numéro, considérés comme des unités, en égale $\frac{1}{6}$. Quel est le numéro ainsi désigné. *Rép.* Le numéro 54.

62. Le carré de la différence de deux nombres en égale la somme, et $\frac{1}{5}$ du premier est égal à $\frac{1}{3}$ du second. Quels sent ces deux nombres? *Rép.* 10 et 6.

63. Un officier indiquait ainsi le numéro de son régiment: Un de ses facteurs est à l'autre : : 1 : 5, et leur somme est au produit : : 6 : 25. Quel était ce numéro?

Rép. 125.

64. Mon âge composé de deux chiffres et lu au rebours, me vieillit de $\frac{1}{5}$. Quel est-il? *Rép.* 45

65. Le produit de deux nombres surpasse leur somme de moitié, et égale le triple de leur différence. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 2 et 6.

66. Lorsque le frère avait le carré de l'âge de la sœur,

celle-ci avait $\frac{1}{7}$ de l'âge actuel du frère, et dans 8 ans d'ici, la somme de leurs deux âges sera augmentée des $\frac{4}{9}$. Quel âge ont-ils l'un et l'autre ?

Rép. 21 et 15 ans.

67. Mon jardin, plus long que large, a 900 toises carrées ; si avec la même superficie il était carré parfait, sa longueur serait diminuée des $\frac{2}{5}$. De combien sa largeur serait-elle augmentée ? *Rép.* Des $\frac{2}{3}$.

68. Il y a 8 ans, l'âge du frère égalait les âges réunis de ses deux sœurs ; dans 8 ans il n'en égalera que les $\frac{2}{3}$, et à cette époque l'âge de la plus jeune sœur égalera le $\frac{1}{4}$ de la totalité des trois âges. Quel est l'âge actuel de chacun des trois? *Rép.* 24, 20, et 12 ans.

69. Trois sœurs se partagent un panier de poires. La part de l'aînée est à celle de la cadette :: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{3}$; la part de la cadette est à celle de la plus jeune :: $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{4}$; la somme des carrés des trois parts égale 549. Combien chaque sœur a-t-elle eu de poires ? *Rép.* 18, 12, et 9.

70. Un joueur interrogé sur son gain, répond : Divisé par son plus petit sous-multiple, il diminue de £10 ; divisé par son plus grand sous-multiple, il diminue de £12. Combien de louis avait-il gagné ? *Rép.* £15.

71. Le numéro de ma maison a sept sous-multiples sans compter l'unité. Le quatrième, dans l'ordre de grandeur, égal $\frac{1}{6}$ du numéro. A quel numéro suis-je logé ? *Rép.* Au numéro 36.

72. Une paysanne apporte à la ville un panier d'œufs. Elle en vend $\frac{1}{4}$ dans une maison et 25 dans une autre. Triplez ce qui lui reste, et vous reproduirez le contenu primitif du panier. Quel était ce contenu ?

Rép. 60 œufs.

73. Ma main droite renferme le double des jetons de ma main gauche ; mais si je passe dans celle-ci la racine

carrée des jetons de l'autre, chaque main en aura un nombre égal. Combien y en a-t-il dans chacune d'elles?
Rép. 16 et 8.

74. Si j'avais payé ma montre $\frac{1}{3}$ de plus, son prix eût été inférieur de £4 au double de ce qu'elle me coûte. Combien l'ai-je payée? *Rép.* £6.

75. L'un des facteurs d'une multiplication est 5, et l'autre facteur est inférieur au produit de 8 unités. Quel est cet autre facteur? *Rép.* 2.

76. Un monsieur tire sa montre; on lui demande l'heure; il réfléchit un instant et répond ensuite: Le carré de l'heure actuelle, augmenté de sa racine, est moitié plus grand que diminuée de sa racine. Quelle heure était-il? *Rép.* 5 heures.

77. La somme de quatre termes en progression arithmétique égale 44; celle des deux premières égale 18. Quels sont ces quatre termes? *Rép.* 8, 10, 12, et 14.

78. Deux nombres diffèrent entre eux de 4 unités, et leur somme est inférieure de 4 unités à leur produit. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 2 et 6.

79. La différence de deux nombres égale les $\frac{5}{6}$ du grand, et représente en même temps le carré du petit. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 30 et 5.

80. De deux nombres inégaux, le plus petit égale les $\frac{2}{5}$ de leur somme, et la somme est égale aux $\frac{5}{12}$ de leur produit. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 6 et 4.

81. La somme de deux nombres, jointe à leur différence, égale 100, et leur différence jointe à leur quotient égale 45. Quels sont ces nombres? *Rép.* 50 et 10.

82. J'ai reçu ce matin un panier de pêches: j'en ai mis $\frac{1}{12}$ de côté pour moi, et le restant s'est trouvé un

nombre premier que j'ai réparti en portions égales entre tous mes enfans. Combien ai-je d'enfans ? *Rép.* 11.

83. Les $\frac{3}{4}$ du numérateur égalent les $\frac{2}{3}$ du dénominateur, et la somme des deux termes surpasse de 11 le produit de $\frac{1}{3}$ du dénominateur par $\frac{1}{4}$ du numérateur. Quelle est cette fraction ? *Rép.* $\frac{8}{9}$.

84. J'achetai hier un cheval que je revendis de suite avec un bénéfice égal aux $\frac{3}{4}$ moins **£11**, de mon déboursé, ce qui m'a fait gagner 20 pour 100. Combien avais-je payé mon cheval ? Combien l'ai-je revendu ?
Rép. £20 et £24.

85. La somme des quatre termes d'une proportion est 100. Le premier est égal au troisième et la raison est 4. Quels sont ces termes ? *Rép.* 40 : 10 : : 40 : 10.

86. Le dividende égal le carré du diviseur et leur somme jointe au quotient égale 840. Quel est ce dividende ? quel est ce diviseur ? *Rép.* 784 et 28.

87. Un carré est quadruple d'un autre, et leur somme jointe à la somme des deux racines donne pour total 530. Quel sont ces deux carrés ? *Rép.* 400 et 100.

88. Une laitière vend des œufs de poule et des œufs de canard. Leur prix moyen est de 16 sous la douzaine et 6 douzaines des derniers rapportent autant que 10 douzaines des premiers. Que coûte chaque douzaine d'œufs ? *Rép.* 12 et 20 *sous.*

89. Que te coûtent ces 6 livres de sucre ? Si la livre eut valu 3 sous de plus, mon déboursé eût été plus fort de $\frac{1}{5}$. Que coûtait la livre ? *Rép.* 15 *sous.*

90. Les quatre termes d'une proportion égalent 100. Ajoutez l'unité à chacun d'eux, ils sont encore en proportion. Quels sont ces termes ?
Rép. 25 : 25 : : 25 : 25.

91. La somme de deux nombres surpasse leur diffé-

rence de 12, et leur produit surpasse la somme de 24. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 6 et 6.

92. Un nombre carré est tel que, si nous en retranchons 25 unités, nous aurons pour reste $7\frac{1}{2}$ fois sa racine. Quel est ce carré? *Rép.* 100.

93. Un capital en viager, placé à $13\frac{1}{3}$ pour 100 par an, produit chaque mois une rente égale à sa racine carrée. Quel est ce capital? *Rép.* $8100.

94. Le produit de deux nombres égal 120. Augmentez chacun d'eux de l'unité, le produit égalera 150. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 24 et 25.

95. Deux nombres sont égaux. Si l'on augmente chacun d'eux de 3 unités, leur produit augmentera de 51. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 7 et 7.

96. La somme et la différence de deux nombres égalent ensemble 24; le produit et le quotient égalent 51. Quels sont ces deux nombres? *Rép.* 4 et 12.

97. Le nombre de mes années est également divisible par 5 et par 7; mais le quotient par 7 a 4 unités de moins. Quel est mon âge? *Rép.* 70 ans.

98. Les deux termes d'une division joints ou quotient égalent ensemble 109. Retranchez 8 unités du dividende, et le quotient deviendra moindre de 2 unités. Quel est ce dividende, ce diviseur et ce quotient.
Rép. 84, 4 et 21.

99. Le carré du N. surpasse le D. de l'unité, et la somme des deux termes surpasse de l'unité le double de leur différence. Quelle est cette fraction? *Rép.* $\frac{3}{8}$.

100. Les deux termes d'une division sont les mêmes que les deux termes d'une autre division, mais *dans un ordre renversé*. La somme des quatre termes égale 80 et la somme des deux quotients $2\frac{1}{6}$. Quels sont les deux termes des divisions? *Rép.* 24 et 16.

101. Moitié du dividende égale le carré du diviseur ; moitié du diviseur égale la racine carrée du quotient. Quel est ce dividende et ce diviseur ? *Rép.* 128 et 8.

102. Deux nombres sont : : 8 : 5. Retranchez 5 unités du premier pour les joindre au second, ils seront : : 7 : 6. Quels sont ces deux nombres ? *Rép.* 40 et 25.

103. Combien de lieues du point A au point B, demande quelqu'un ? Leur nombre, lui dit-on, n'a que deux facteurs dont la somme est 20. Quel est ce nombre ? *Rép.* 19.

104. Le produit des deux termes d'une fraction est 120. Ajoutez l'unité au N., retranchez-la au D., leur produit sera 1. Quelle est cette fraction ? *Rép.* $\frac{10}{12}$.

105. La faillite d'un débiteur de mauvaise foi m'a emporté les $\frac{4}{5}$ d'un capital que j'avais placé chez lui. La rente du reste placé à 5 pour 100 égale la racine carrée du capital primitif. Quel était ce capital ? *Rép.* $10,000.

106. Vous me trouvez bien vieille, monsieur ; eh bien ! il y a remède à cela, lisez mon âge au rebours et je rajeunirai des $\frac{7}{9}$. Quel âge avait cette dame ? *Rép.* 81 ans.

107. Déterminez trois nombres en progression arithmétique, dont le troisième égale le carré du premier, et le deuxième le triple de la raison ? *Rép.* 2, 3 et 4.

108. J'ai fait 2 lieues à l'heure, disait un courrier ; si j'en eusse fait $2\frac{1}{2}$, je fusse arrivé 8 heures plus tôt. Qu'elle a été la longueur de la route ? *Rép.* 80 lieues.

109. La somme des deux termes d'une fraction égalera 22, si l'on double le D., et n'égalera que 21 si l'on triple le N. Quelle est cette fraction ? *Rép.* $\frac{4}{9}$.

110. En augmentant de £3 ceux que contient ma bourse, leur nombre deviendra carré. Diminuez le au

contraire de £3, vous aurez la racine du carré dont je viens de parler. Combien ma bourse contient-elle de louis? *Rép.* £6.

111. Une dame, questionnée sur son âge, répond: Augmentez-le des $\frac{3}{4}$ et dans cet état diminuez le des $\frac{2}{3}$, j'aurai 25 ans de moins. Quel âge avait-elle? *Rép.* 60 ans.

112. Le chiffre 9 ne figure pas dans les deux chiffres qui forment l'âge de ma femme; mais si vous lisez ces deux chiffres au rebours, vous la vieillirez, à son grand déplaisir, d'un nombre d'années qui est entre 55 et 70. Quel âge a ma femme? *Rép.* 18 ans.

113. Carrez, disait quelqu'un en regardant sa montre, les $\frac{2}{5}$ de l'heure actuelle, vous aurez celle qui sonnera dans 6 heures. Qu'elle heure était-il? *Rép.* 10 heures.

114. Combien avez-vous d'enfants, monsieur? Leur nombre est égal à y: le carré de y est égal à $2y$ plus $9x$, et y surpasse x des $\frac{2}{7}$. *Déterminez par une seule équation qui ne contienne que l'inconnue* x, le nombre d'enfants ainsi désigné? *Rép.* 9.

115. Trouvez deux nombres dont la somme est à la différence : : 7 : 3, et dont le produit augmenté de 10 unités égale le carré des $\frac{2}{3}$ du grand nombre. *Rép.* 15 et 6.

116. Ma tante a deux capitaux placés l'un à 5 pour 100, et l'autre à 6: leur somme égale \$35,000. $\frac{1}{5}$ du revenu du premier capital est égal à $\frac{1}{8}$ du second. Quels sont les deux capitaux placés par ma tante? *Rép.* \$15,000 et \$20,000.

117. Quatre termes sont en proportion géométrique: la raison est $\frac{1}{2}$. Le quatrième terme égale le carré du premier, et le second divisé par le troisième donne pour quotient 1. On demande quels sont ces quatre termes. *Rép.* 4 : 8 : : 8 : 16.

118. Le nombre x surpasse le nombre y de toute la racine de x, et $\frac{1}{4}$ de x égale les $\frac{3}{10}$ de y. Déterminez ces deux nombres *par une seule inconnue.* *Rép.* 36 et 30.

119. Hier j'achetai 5 aunes de drap vert et 6 de drap bleu. Ce matin j'en ai acheté 3 du bleu et 9 du vert et ma dépense a été la même que celle d'hier. Le prix moyen des deux qualités égale 35 chelins. Que coûte l'aune de chacune? *Rép.* 30 et 40 chelins.

120. Dans 6 ans, disait une dame, ma fille Adelaïde aura le carré de l'âge qu'elle avait il y a 6 ans. Quel âge a-t-elle aujourd'hui. *Rép.* 10 ans.

121. La somme de deux nombres égale 4 fois leur différence, et celle-ci égale $\frac{1}{15}$ de leur produit. On demande quels sont ces deux nombres? *Rép.* 10 et 6.

122. Combien d'hommes dans votre détachement, demande-t-on à un officier? Leur nombre n'a que 3 facteurs dont la somme est 31. Quel est ce nombre?
Rép. 25.

123. Ton mémoire s'élève à tant de *dollars* n'est-ce pas?—Oui, monsieur.—Eh bien! en voilà tant et acquitte-le.—Oh! monsieur, $\frac{1}{4}$ de rabais, cela ne ce peut. Allons, bien, voilà encore une somme qui n'est inférieure que de l'unité à $\frac{1}{9}$ de la première, et n'en parlons plus. C'est pourtant dur, monsieur, de perdre ainsi le double, plus 1, de la racine carrée de mon mémoire. A combien montait-il? *Rép.* A $144.

124. L'âge du grand papa et celui du petit fils sont tels que leur quotient égale $\frac{1}{9}$ de leur produit, et que la somme de ce produit et de ce quotient égale 320. Quel âge ont-ils l'un et l'autre? *Rep.* 96 et 3 ans.

125. On a mêlé ensemble deux barils de vin dont l'un a coûté 180 chelins et l'autre 140 chelins. Le premier contient 20 bouteilles de plus que le second et coûte 6 deniers de moins par bouteille. Que vaut la bouteille du mélange? *Rép.* $3\frac{1}{2}$ *chelins.*

126. Le quotient surpasse le diviseur de moitié plus 1, et la somme du diviseur et du quotient surpasse de l'unité le double de la racine du dividende. Quels sont ce dividende, ce diviseur et ce quotient ?

Rép. 400, 16 et 25.

127. Deux fontaines coulant ensemble ont rempli un bassin dans l'espace de 3 heures. Si la première n'eût fourni de l'eau que pendant 2 heures, la seconde eût dû couler 6 heures en tout pour achever de remplir le bassin. Quel temps faudrait-il à chaque fontaine coulant seule pour le remplir ? *Rép.* 4 et 12 heures.

128. L'âge du père a deux facteurs dont l'un est égal à l'âge de la fille et l'autre est inférieur au premier de 18 unités. Carrez cet autre facteur ; ajoutez-y $\frac{1}{3}$ de l'âge de la fille, joignez ce résultat à la somme des deux âges, le total général sera égal à 100. Quel âge ont le père et la fille ? *Rép.* 63 et 21 ans.

129. Vous venez du jardin, mesdemoiselles ; combien chacune de vous a-t-elle d'oranges dans son sac ? Le produit des deux contenus surpasse leur somme de 14 et leur différence de 22. Quels sont ces deux contenus ?

Rép. 6 et 4.

130. Un nombre de trois chiffres est multiple de 11, et le chiffre des unités est quadruple de celui des centaines. Quel est ce nombre ? *Rép.* 154.

131. Un nombre de chiffres est tel que le chiffre qui exprime sa racine, placé à la droite ou à la gauche de ce nombre, donne deux résultats dont le dernier surpasse le premier de 252 unités. Quel est ce nombre ?

Rép. 16.

132. Un marchand d'oiseaux oublie de fermer sa volière. La plupart des prisonniers profitent de cette distraction pour prendre la volée. L'oiselier, questionné sur le nombre des fugitifs, répond : S'il en était parti $\frac{1}{14}$ de plus, le nombre primitif de mes oiseanx, qui était au-

dessus de 130 et au-dessous de 180, serait maintenant réduit de moitié. Quel était ce nombre primitif? Quel est leur nombre actuel? *Rép.* 156 et 84.

133. Un carré est quadruple d'un autre et leur somme surpasse de 4 unités le carré immédiatement supérieur au plus grand des deux. Quels sont ces deux carrés? *Rép.* 25 et 100.

134. Laurent troque sa flûte contre le violon d'Edouard, et donne en retour un nombre de louis égal à $\frac{1}{3}$ du prix de la flûte, plus la racine carrée du prix du violon. Déterminez le prix de chaque instrument, sachant que la somme des deux prix est quadruple des louis donnés en retour par Laurent. *Rép.* £15 et £25.

135. Un nombre de trois chiffres est tel, que la somme de ses chiffres est 16; et, en renversant ce nombre, puis l'ajoutant au nombre renversé, on obtient pour somme 1211 et pour différence 297; quel est ce nombre? *Rép.* 457.

136. Deux sœurs sortent pour des emplettes. L'aînée a plus d'argent que la cadette. La somme de louis contenus dans les deux bourses égale $\frac{1}{6}$ de leur produit, lequel eût été moindre de $\frac{1}{3}$, si moitié des louis de la cadette s'était trouvée dans la bourse de l'aînée. Combien de louis chacune avait-elle? *Rép.* £15 et £10.

137. Quel est le nombre dont le carré, réduit au quart surpasse de $\frac{1}{5}$ le triple des $\frac{5}{6}$ de ce nombre? *Rép.* 12.

138. Ma tante veut faire carreler un salon $2\frac{1}{2}$ fois aussi long que large. Elle demande au maçon combien il faudra de carreaux d'une dimension qu'elle désigne: celui-ci lui répond: Si la longueur n'était que double de la largeur, il en faudrait 800 de moins. Que conclure de cette réponse? *Rép.* Qu'il en fallait 4,000.

139. Un marchand donne fidèlement aux pauvres un vingtième du bénéfice qu'il fait dans son commerce.

Au bout de l'année, ses aumônes se sont élevées à $390. On demande pour combien il a dû vendre de marchandises, sachant que moitié de celles qu'il a vendues lui a donné 10 pour cent, $\frac{1}{3}$ lui a donné 15 pour cent, et le restant 18 pour cent de bénéfice? *Rép.* $60,000.

140. S'il vous faillait aller à une maison dont le numéro comprend trois chiffres, sachant que le chiffre des centaines est double de celui des dizaines, et que la somme des trois chiffres, considérés comme de simples unités, équivaut à $\frac{1}{24}$ du numéro, à quel numéro iriez-vous? *Rép.* Au numéro 216.

141. La somme des quatre termes d'une proportion est 63; le premier est 4 unités de plus que le second; le quotient du troisième par le second est $8\frac{1}{2}$; et le produit des moyens est 136. On demande quels sont les quatre termes de cette proportion? *Rép.* 8 : 4 : : 34 : 17.

142. Le produit des quatre termes d'une proportion est 576; la différence entre le premier et le quatrième terme est 10, et le quotient du troisième terme par le second est $\frac{2}{3}$. Quels sont ces quatre termes?

Rép. 2 : 6 : : 4 : 12.

FIN.

FAUTES A CORRIGER.

Page	IV	ligne	10e	au lieu de:	*mettra l'enfant*; lisez: *met l'enfant*
"	"	"	12e	au lieu de:	*calcul littérale*; lisez: *calcul littéral*
"	6	"	1er	au lieu de:	96; lisez 86.
"	12	"	2e	au lieu de:	45; lisez 35.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.

J. B. ROLLAND, Imprimeur-Libraire, Montréal.